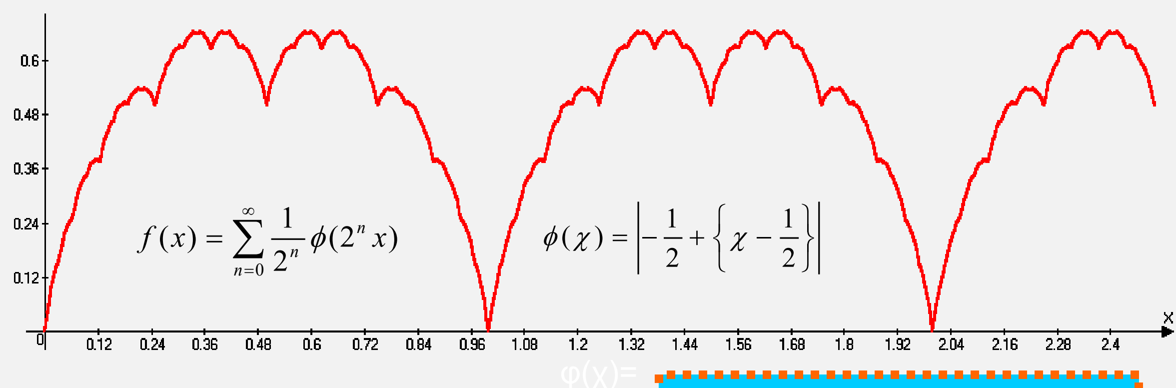
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Π.Μ.Σ. «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Ι.Αραχωβίτης

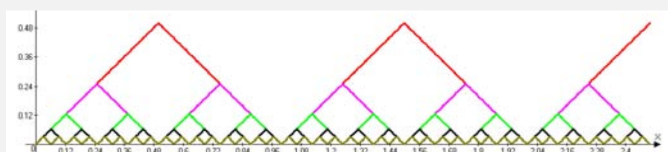
Διπλωματική Εργασία

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΣΩ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Γιάννης Π. Πλατάρος

Α.Μ. 211502





Πλάτωνος ὁρισαμένου, Ἄνθρωπός ἐστι ζῷον δίπουν ἄπτερον, καὶ εὐδοκιμοῦντος, τίλας ἀλεκτρυόνα εἰσήνεγκεν αὐτὸν εἰς τὴν σχολὴν καί φησιν, "οὗτός ἐστιν ὁ Πλάτωνος ἄνθρωπος." ὅθεν τῷ ὅρῳ προσετέθη τὸ πλατυώνυχον.
(Διογένης Λαέρτιος, «Βίοι Φιλοσόφων» Βιβλίο 6 παρ.40 στ. 5-9 αναφερόμενος σε **αντιπαράδειγμα** του Διογένη του Κυνικού)



ΑΘΗΝΑ 2004

<u>Αφιερώνεται στην οικογένειά μου που με στήριξε στην εν Αθήναις διετή παρεπιδημία μου, καθώς και σε κάθε έναν Έλληνα συνάδελφο Μαθηματικό προσωπικά…...</u>

<u>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ:</u> *Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω την τριμελή εξεταστική επιτροπή, η οποία αποτελείτο από τους* ***κ.κ. Ιωάννη Αραχωβίτη, Ευστάθιο Γιαννακούλια και Νικόλαο Καλαμίδα,*** *οι παρατηρήσεις υποδείξεις και διορθώσεις των οποίων, συνέβαλαν αποφασιστικά στην ευπρόσωπη παρουσίαση, επιστημονική αξιοπιστία και αρτιότητα της παρούσης εργασίας.*

Για την συγγραφή της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήθηκε ο επεξεργαστής κειμένου Word 2000 με το προσαρτημένο λογισμικό Math Type 5.0 για την γραφή των πολυπληθών μαθηματικών τύπων. Χρησιμοποιήθηκε κυρίως η γραμματοσειρά Times New Roman με δεσπόζον μέγεθος χαρακτήρων 12 και διάστιχο 1,5

Για τις γραφικές παραστάσεις χρησιμοποιήσαμε το Graph V. 2.7 ,το Graphmatica V.2.0c , το Advanced Grapher V.2.08 ,ενώ στα δύσκολα προστρέξαμε στο MathCAD 2000 professional και στο Mathematica 4.0 Τα τρία πρώτα είναι ελευθέρας διανομής μέσω διαδικτύου.

Η Εκτύπωση έγινε πρώτα σε χαρτί A_4 (210X297mm) των 80 gr της Fuji Xerox στα προεπιλεγμένα περιθώρια με 1cm επί πλέον αριστερό περιθώριο βιβλιοδεσίας, με τον εκτυπωτή Deskjet 930C της Hewlett Packard και αναπαρήχθη φωτοτυπικώς.

Η συγκέντρωση του υλικού της εργασίας έγινε κυρίως τους μήνες Απρίλιο, Μάϊο και Ιούνιο 2003, η θεματική και χειρόγραφη επεξεργασία του β΄ μαθηματικού μέρους τους μήνες Ιούλιο , Αύγουστο , Σεπτέμβριο , ενώ το α΄ γενικό μέρος της εργασίοας γράφηκε κατ΄ευθείαν στον υπολογιστή το διάστημα Οκτωβρίου Νοεμβρίου Δεκεμβρίου 2003 , ενώ οι μήνες Ιανοάριος 2004 έως Ιούνιος 2004 κατηναλώθησαν στις διορθώσεις , στην μορφοποίηση και σε συγύρισμα .Οι τελικές διορθώσεις και παρατηρήσεις από τους επιβλέποντες καθηγητές έγιναν Από Μάρτιο-Ιούλιο 2004.

Για την συγκέντρωση του υλικού χρησιμοποιήσαμε κατά βάσιν την βιβλιοθήκη του Μαθηματικού τμήματος του Παν. Αθηνών την βιβλιοθήκη του Μ.Ι.Θ.Ε. και το διαδίκτυο, αλλά και δευτερευόντως την βιβλιοθήκης του Παδαγωγικού τμήματος του Παν. Αθηνών , την βιβλιοθήκη της Φιλοσοφικής σχολής του Παν. Αθηνών, του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου , της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας κ.ά. . Επίσης αναλώθηκαν πολλά απογεύματα περιήγησης σε όλα τα ειδικά βιβλιοπωλεία περί την οδό Σόλωνος των Αθηνών , ξεφυλλίζοντας όλα τα σχετικά με τον Απειροστικό Λογισμό και περί το θέμα κυκλοφορούντα βιβλία , αρκετά των οποίων έγιναν κτήμα της προσωπική μας βιβλιοθήκης.

Για κάθε αναγνώστη συνάδελφο που θέλει να υποβάλλει οποιαδήποτε καλοδεχούμενη παρατήρηση ή σχόλιο περί την εργασία, τα στοιχεία μας είναι : **Γιάννης Παν. Πλατάρος , Καπετάν Κρόμπα 37 , 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ , τηλ. 27220-23585 ή 22164 ή 6947187139 ηλ/ταχ. Plataros@sch.gr ή Plataros@pathfinder.gr Ιστοσελίδα : http://homepages.pathfinder.gr/plataros**

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ Β΄

0.ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2. ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος γίνεται μια λεξικολογική , ιστορική , εννοιολογική, λογική, επιστημολογική και παιδαγωγική προσέγγιση στο αντιπαράδειγμα σε σχέση με τον Απειροστικό Λογισμό. Επίσης γίνεται μια προσέγγιση σε ιστορικά παραδείγματα του Απειροστικού Λογισμού καθώς και σε λάθη που έκαναν μεγάλοι μαθηματικοί πάνω στην διαίσθηση του απείρου. Αναδεικνύεται έτσι η δυσκολία κατανόησης της έννοιας του απείρου καθ΄ εαυτής, αλλά και ως πηγής επιστημολογικών και διδακτικών εμποδίων . Φαίνεται έτσι η ανάγκη εισαγωγής του αντιπαραδείγματος στην διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού, ως παράγοντα άρσης και θεραπείας παρανοήσεων ή και βελτίωσης λανθασμένων νοητικών αναπαραστάσεων των δύσκολων εννοιών που πραγματεύονται το άπειρο και το απειροστό.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζουμε διδακτικά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα , κάνοντας μια κάλυψη σε όλα τα κεφάλαια του Απειροστικού Λογισμού με συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής . Έμφαση δίδεται στα βασικά κεφάλαια , όπως . των ακολουθιών όπου μελετάται εκτεταμένα η θεμελιώδης έννοια της σύγκλισης μέσω της πλέον απλής έννοιας συνάρτησης όπου μπορεί να υπάρχει σύγκλιση , όπως είναι η ακολουθία πραγματικών αριθμών. Γενικά , η έννοια του ορίου ως η πλέον βασική έννοια του Απειροστικού Λογισμού , μελετάται προσεκτικά και πλήρως.

Ειδικότερα:

Ελήφθη μέριμνα έτσι ώστε όλες οι εφαρμογές που παρουσιάζονται να έχουν πληρότητα παρουσίασης και να καταγράφονται λεπτομερώς όλα τα βήματα μιας απόδειξης , ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως βοήθημα από έναν τελειόφοιτο Λυκείου μέχρι και τον πτυχιούχο Μαθηματικό. Ακόμα, στη έκταση των εννοιών που καλύπτει η παρούσα εργασία, κρίθηκε σκόπιμο, εκτός από τα θεμελιώδη εισαγωγικά κεφάλαια του, ορίου συνάρτησης, συνέχειας συνάρτησης, παραγώγισης , μελέτης συνάρτησης και ολοκλήρωσης, τα οποία καλύπτονται από το αναλυτικό πρόγραμμα του Λυκείου, να εισαχθούν και τα κεφάλαια των Ακολουθιών και των Σειρών .Αυτά δεν διδάσκονται πλέον στο Λύκειο, αλλά μπορούν να εισαχθούν στο μέλλον όπως άλλωστε υπήρχαν και παλιότερα. Επίσης, κρίθηκε αναγκαίο, να υπάρχει και η ύλη που καλύπτεται συνήθως στο πρώτο έτος των σχολών των Θετικών Επιστημών και των Πολυτεχνείων. Έτσι καλύψαμε το ολοκλήρωμα Riemann, την ομοιόμορφη

συνέχεια, την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών και τα γενικευμένα ολοκληρώματα. Όλα πλέον τα κεφάλαια, δεν καλύφθηκαν σε βασικό επίπεδο, αλλά σε προχωρημένο για λόγους πληρότητας.

Στην εργασία μας, υπάρχουν κάποια **πρωτότυπα σημεία** που είναι τα εξής:

Στο πρώτο μέρος:

1.Εκφράζουμε την εικασία , ότι ο όρος «αντιπαράδειγμα» δεν είναι μετάφραση του Αγγλικού όρου «counterexample» αλλά προέρχεται από το αρχαιοελληνικό ρήμα αντιπαραδείκνυμι το οποίο συναντάται στα γραπτά του Γρηγορίου Νύσσης. Η εικασία μας εδράζεται στην σημασία του ρήματος σε συγκεκριμένη χρήση του όπου παρατίθεται αντιπαράδειγμα σε ορισμό του «αληθούς άρτου» και απ΄ όπου ευθέως εξάγεται η αντίστοιχη σημασία για το ουσιαστικό «αντιπαράδειγμα» (Α. 1.4. αυτόθι)

2. Παραθέτουμε δύο αρχαίες χρήσεις του αντιπαραδείγματος .Ένα στον «Γοργία» του Πλάτωνος, (υπάρχει σε ξενόγλωσση βιβλιογραφία και συγκεκριμένα στο διαδίκτυο) και το άλλο στους «Βίους Φιλοσόφων» του Διογένους Λαερτίου. (υπάρχει σε βιβλιογραφία, αλλά όχι με την σημασία του αντιπαραδείγματος)(Α1.5 αυτόθι)

3. Διερευνούμε την συχνότητα εμφάνισης του διεπιστημονικού όρου «αντιπαράδειγμα» στην γλώσσα μας σε σχέση με τον αντίστοιχο αγγλικό όρο , με προσφυγή στις διαδικτυακές μηχανές αναζήτησης. (Α1.1 & Α1.2 αυτόθι)

4. Διερευνούμε τις λεκτικές μαθηματικές διατυπώσεις που υποκρύπτουν αντιπαράδειγμα.(Α.3.3 αυτόθι)

5. Παραθέσαμε συγκεντρωτικά τις ιδιότητες κάποιων «πασπαρτού» παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων του Απειροστικού Λογισμού που είναι η ακολουθία $\alpha_\nu=(-1)^\nu$, η αντίστοιχη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ καθώς και η συνάρτηση του Dirichlet (και παραλλαγές της) Έκπληξη προκαλεί πώς τόσο λίγα παραδείγματα έχουν τόσο ενδιαφέρουσες ιδιότητες που είναι διδακτικά πάρα πολύ χρήσιμες στην κατάδειξη λεπτών σημείων της θεωρίας που χρήζουν διασαφήσεως.

6. Επεξετείναμε ένα υπόδειγμα για τα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα του Ι. Αραχωβίτη που βρήκαμε στα Πρακτικά του 19ου Συνεδρίου της ΕΜΕ στο άρθρο του «Έννοιες και Ιδέες από την Ιστορία των Μαθηματικών αρωγοί στην σύγχρονη διδακτική τους» σελ. 169-171 . Ουσιαστικά καταστήσαμε λίγο πιο λεπτομερές το υπόδειγμα (μοντέλο) που περιγράφει το πεδίο κατανόησης μιας

έννοιας και τον ρόλο των κλάσεων παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγματων στην κατανόησή της. Η επέκταση στην οποία προέβημεν έγκειται στην θεώρηση υποκλάσεων αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων ως προς μία ιδιότητα που θέτει εκ των προτέρων κάποιος και η οποία είναι μεν υποκειμενική, αλλά όχι και αυθαίρετη, αφού τίθεται ως απάντηση σε διδακτικά ή επιστημολογικά εμπόδια που συναντούν οι μαθητές.

Επίσης, στο λεπτομερέστερο αυτό υπόδειγμα , ανακαλύπτουμε μια πρακτική εφαρμογή του στον έλεγχο της διδακτικής πληρότητας ενός βιβλίου σύμφωνα με εκ των προτέρων γνωστά και κοινοποιούμενα κριτήρια. Γινόμαστε σαφείς με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:

Στην προκήρυξη συγγραφής ενός βιβλίου Απειροστικού Λογισμού, για το κεφάλαιο «Σύγκλιση ακολουθίας» τίθεται ο όρος «πληρότητα των παρουσιαζομένων παραδειγμάτων σύγκλισης στο $\alpha \in \mathbb{R}$ ως προς την κατεύθυνση σύγκλισης» Λέγοντας «κατεύθυνση σύγκλισης» συμφωνούμε να ορίζουμε τις δυνατές κλάσεις παραδειγμάτων σύγκλισης στο α που καθορίζονται από το πλήθος των όρων τους που είναι δεξιά του α , αριστερά του α ή ίσοι με α και φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάση	**Πλήθος όρων <α**	**Πλήθος όρων=α**	**Πλήθος όρων>α**	**Εκπλήρωση ασθενέστερης συνθήκης από την** $\lvert \alpha_\nu - \alpha \rvert < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
(Π_1)	πεπ/νο	πεπ/νο	πεπ/νο	Δεν τις εξετάζει ο Απειροστικός Λογισμός
(Π_2)	∞	πεπ/νο	πεπ/νο	$0 < \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon \ , \ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
(Π_3)	πεπ/νο	∞	πεπ/νο	$0 = \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon \ , \ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
(Π_4)	πεπ/νο	πεπ/νο	∞	$0 < \alpha_\nu - \alpha < \varepsilon \ , \ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
(Π_5)	∞	∞	πεπ/νο	$0 \leq \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon \ , \ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
(Π_6)	∞	πεπ/νο	∞	$0 < \lvert \alpha_\nu - \alpha \rvert < \varepsilon \ , \ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
(Π_7)	πεπ/νο	∞	∞	$0 \leq \alpha_\nu - \alpha < \varepsilon \ , \ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
(Π_8)	∞	∞	∞	$\lvert \alpha_\nu - \alpha \rvert < \varepsilon \ , \ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$

Η κάθε κλάση ακολουθιών από την (Π_2) έως και (Π_8) , έχει άπειρους και υπεραριθμήσιμους μάλιστα αντιπροσώπους.

Όμως , φθάνει και μόνο ένα παράδειγμα από την κλάση (Π_8) για να δικαιολογήσει πλήρως τον ορισμό. Ένα τέτοιο παράδειγμα θα μπορούσαμε συμφωνήσουμε να το λέμε **πλήρες** εξ αιτίας αυτής του της ιδιότητας.

Επίσης πρέπει να σχολιασθεί το εξής:

Αν σε ένα διδακτικό βιβλίο ακολουθιών υπάρχουν παραδείγματα από τις κλάσεις (Π_2)-(Π_7) ενώ δεν υπάρχει κανένα παράδειγμα από την κλάση (Π_8) τότε η τελική συνθήκη του ορισμού σύγκλισης, θα μπορούσε να έχει μια μορφή **διάζευξης** των ασθενεστέρων συνθηκών (Π_2) έως (Π_7) η οποία είναι κι αυτή μια ασθενέστερη συνθήκη . Συνεπώς , αν δεν παρατίθεται **έστω και ένα παράδειγμα της κλάσεως (Π_8)** , ο γνωστός ορισμός της σύγκλισης **δεν δικαιολογείται πλήρως** . Από την προσωπική του αντίληψη , κάθε αναγνώστης που ασχολείται με τα μαθηματικά καταλαβαίνει την σπανιότητα παράθεσης παραδείγματος ακολουθίας σαν την

$$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} : \alpha_\nu = \left\{ \begin{array}{ll} 5+\frac{1}{\nu}, & \alpha\nu\ \ \nu = 3\kappa \\ 5 & ,\alpha\nu\ \ \nu = 3\kappa+1 \\ 5-\frac{1}{\nu}, & \alpha\nu\ \ \nu = 3\kappa+2 \end{array} \right\}$$

η οποία συγκλίνει στο 5 και μόνη της δικαιολογεί πλήρως τον ορισμό. Η παράθεση οσουδήποτε πλήθους παραδειγμάτων από όλες τις άλλες κλάσεις δεν δικαιολογούν πλήρως την απαίτηση εκπλήρωσης της ισχυρότερης συνθήκης $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$, άρα και τον ίδιο τον ορισμό.

Επομένως από τα παραπάνω , καθίσταται σαφές το παιδαγωγικό περιεχόμενο του τεθέντος κριτηρίου, το οποίο προσλαμβάνει και αντικειμενικό πλέον χαρακτήρα.

Αναλόγως τίθενται και κριτήρια αντιπαραδειγμάτων μη σύγκλισης για τα οποία ένα κριτήριο ταξινόμησης θα μπορούσε να είναι λ.χ. ο αριθμός των οριακών αριθμών της ακολουθίας. Έτσι δημιουργούνται οι κλάσεις : (i)Οι ακολουθίες που έχουν δύο τουλάχιστον οριακούς πραγματικούς αριθμούς (ii) Οι ακολουθίες που συγκλίνουν στο $+\infty$ (iii)Οι ακολουθίες που συγκλίνουν στο $-\infty$ (iu) Οι ακολουθίες που έχουν ως οριακό «αριθμό» το$+\infty$ είτε το $-\infty$ και τουλάχιστον ένα ακόμη πραγματικό αριθμό. Κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει αν το θεωρεί διδακτικά αναγκαίο και υποκλάσεις ανάλογα με το αν οι μη συγκλίνουσες ακολουθίες έχουν άπειρους ή πεπερασμένους οριακούς αριθμούς.

Το βέβαιο από τα παραπάνω είναι , ότι για την πλήρη παρουσίαση της έννοιας της σύγκλισης σε ένα εγχειρίδιο, θα πρέπει να υπάρχουν αντιπρόσωποι από όλες τις κλάσεις παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.(Α4.1. αυτόθι)

7. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου στο Β΄ μέρος, υπάρχουν και σύντομες οδηγίες για την κατασκευή βασικών παραδειγμάτων επί του κεφαλαίου , κάτι που δεν γνωρίζουμε να υπάρχει στην ελληνική τουλάχιστον βιβλιογραφία.

8. Κάποια σχόλια και αντιπαραδείγματα επί των δυνατοτήτων προγραμμάτων των Η/Υ και στον ικανοποιητικό ή μη βαθμό σχεδίασης γραφημάτων είναι επίσης δικά μας.(Β.3.3.1, Β4.1.6, Β11.1.15) Ευάριθμα επίσης ερωτήματα τύπου ύπαρξης ή ισχυρισμού που καταρρίπτεται με αντιπαράδειγμα σε κάθε κεφάλαιο είναι δικά μας χωρίς βεβαίως τα παρατιθέμενα αντιπαραδείγματα να διεκδικούν μαθηματική πρωτοτυπία.

Τέλος, ο ίδιος ο τίτλος της εργασίας μας διεκδικεί πρωτοτυπία στην Ελληνική βιβλιογραφία καθώς και η επιλογή αξιόλογων παραδειγμάτων που διευκρινίζουν θέματα θεωρίας ή επέχουν θέση αποδείξεως σε επίσης λεπτά σημεία των εννοιών του Απειροστικού .

Θέλουμε να πιστεύουμε ότι η παρούσα εργασία θα είναι χρήσιμη για όλους τους αναγνώστες φοιτητές ή ασχολούμενους με τα μαθηματικά γενικώς.

Ι.Π.Π.

1. Η λεξικογραφία του αντιπαραδείγματος.

1.1. Η αναζήτηση στα διάφορα λεξικά

Εντύπωση προκαλεί η σπανιότητα καταγραφής του όρου «αντιπαράδειγμα» στα Ελληνικά αλλά και στα ξενόγλωσσα λεξικά. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι ο όρος αποτελεί νεολογισμό , είναι δηλαδή κατασκευασμένη στα νεώτερα χρόνια λέξη, δεν υπάρχει στα αρχαία Ελληνικά και μάλιστα είναι μεταφρασμένος όρος από τον αντίστοιχο Αγγλικό (counterexample) .Αυτό τουλάχιστον αναφέρει το γνωστό έγκυρο λεξικό Μπαμπινιώτη , αν και ανακαλύψαμε μια χρήση του ρήματος «**αντιπαραδείκνυμι**» στον **Γρηγόριο Νύσσης** με σημασία αντίστοιχη του ουσιαστικού που φέρεται ως νεολογισμός. Όμως, η σπανιότητα καταγραφής του όρου «αντιπαράδειγμα» καθίσταται δυσεξήγητη αν αναλογισθούμε ότι απαντάται ήδη στην Ελληνική βιβλιογραφία τουλάχιστον από την δεκαετία του ΄60[1] , είναι διεπιστημονικός όρος και όχι αυστηρά μαθηματικός, ενώ η καθημερινή του χρήση από ανθρώπους με τουλάχιστον μέση εκπαίδευση συμπίπτει σχεδόν και με το αυστηρά ορισμένο νόημα του όρου.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει γνωστά λεξικά στα οποία ανατρέξαμε και στα οποία αναφέρεται ή μη ο όρος «αντιπαράδειγμα»

Ταυτότητα λεξικού	Περιέχει τον όρο
Μεγάλη Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια 24 τ.	ΟΧΙ
Εγκυκλοπαίδεια ΔΟΜΗ	ΟΧΙ
Πάπυρος –Larouse –Britannica 61 τ.	ΟΧΙ
Αντίστροφο λεξικό Νέας Ελληνικής Γ.Ι. Κουρμουλή	ΟΧΙ
Σταυρο-λεξικό (36.000 λέξεις)	ΟΧΙ
Νέο Ελληνικό Λεξικό- Κριαρά	ΟΧΙ

[1] Σε μια πρόχειρη αναζήτηση στην βιβλιοθήκη του Μαθηματικού Τμήματος του Παν. Αθηνών βρήκαμε το σύγγραμμα του Χρήστου Β. Γκλάβα «Εισαγωγή στην συνολοθεωρία» που αναφέρεται στο αντιπαράδειγμα και στον μαθηματικό ορισμό του, (σελ. 86) το οποίο έχει εκδοθεί το 1967.

Λεξικό Νέας Ελληνικής Γλώσσης- Σταματάκου	ΟΧΙ
Λεξικό Κοινής Νεοελληνικής -Τριανταφυλλίδη	ΟΧΙ
Επίτομο Εγκυκλοπαιδικό λεξικό Ελευθερουδάκη	ΟΧΙ
Λεξικό Πρωίας 2 τ.	ΟΧΙ
Λεξικό Παιδεία –Εκδόσεις Σταφυλίδη	ΟΧΙ
Μέγα Αγγλοελληνικό λεξικό –Εκδόσεις Οδυσσέας. 4τ.	ΟΧΙ
Υπερλεξικό Ελληνικής Γλώσσας –Παγουλάτου 6 τ.	ΟΧΙ
Επίτομο Αγγλοελληνικό λεξικό Σταυρόπουλου	ΟΧΙ
Επίτομο Ελληνοαγγλικόν λεξικόν Δ. Κυριακοπούλου	ΟΧΙ
Ελληνοαγγλικό Λεξικό Γιωργακά ,επί γραμμής (On-line)	ΟΧΙ
Ελληνικό Λεξικό Τεγόπουλου –Φυτράκη	ΟΧΙ
Encyclopedia of Statistical sciences (12 τόμοι)	ΟΧΙ
Encyclopaedia of mathematics (6 τόμοι)	ΟΧΙ
Αγγλο-Ελληνικόν Λεξικόν Μαθηματικών όρων –Π. Παπαγιαννακόπουλου	ΟΧΙ
Επίτομο Λεξικό Μαθηματικών -Παττάκη	ΟΧΙ
Αγγλοελληνικό & Ελληνοαγγλικό ηλεκτρονικό λεξικό MAGENTA	ΝΑΙ
Μεταφραστικό λογισμικό SYSTRAN	ΝΑΙ
Λεξικό Νεοελληνικής Γλώσσας Μπαμπινιώτη	ΝΑΙ
Αγγλοελληνικό λεξικό Μαθηματικών όρων –εκδόσεις ΤΡΟΧΑΛΙΑ	ΝΑΙ

1.2 . Η αναζήτηση στον Παγκόσμιο Ιστό

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η ποιοτική κατανομή της χρήσης της λέξης σε τομείς της ζωής μας.

Μια περιήγηση στις γνωστές μηχανές αναζήτησης Google, Alta Vista, Yahoo οι οποίες υποστηρίζουν τα Ελληνικά, επί 65 διαφορετικών ιστοσελίδων που περιέχουν την λέξη «αντιπαράδειγμα» έδωσαν , ότι τα 2/3 αναφέρονται σε Μαθηματικά και το 1/3 περίπου σε άλλους τομείς .

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Τομείς	Συχνότητα εμφάνισης
Μαθηματικά	45
Πληροφορική	5
Οικονομία	2
Γραμματική	2
Οικολογία	1
Λογική	1
Χημεία	1
Κοινωνιολογία	1
Τεχνολογία	1
Θρησκεία	1
Πολιτική	1
Συζητήσεις	1
Κινηματογράφος	1
Δημοσιογραφία	1
Συνδικαλισμός	1
ΑΘΡΟΙΣΜΑ	65

Δημιουργήθηκε το ερώτημα αν και κατά πόσον ο όρος «αντιπαράδειγμα» απαντάται συχνότερα στην Ελληνική γλώσσα απ΄ ότι στην Αγγλική ή όχι. Μια ενδεικτική προσεγγιστική έρευνα θα ήταν να δούμε αν οι λόγοι των συχνοτήτων εμφάνισης της λέξης «Αντιπαράδειγμα» προς την λέξη «παράδειγμα» στις δύο γλώσσες είναι ίσοι.

Με προσφυγή στις υπηρεσίες των μηχανών αναζήτησης, και ειδικά στην Google ,(στις 20/10/2003) βρήκαμε ότι ο λόγος των ιστοσελίδων που περιέχουν τουλάχιστον μία φορά την λέξη example σε όλες τις πτώσεις ενικού και πληθυντικού αριθμού είναι 221.000.000 ενώ για τον όρο counterexample 195.000 . Έχομε έτσι τον λόγο 1:1133 . Στην Ελληνική οι αντίστοιχες απόλυτες συχνότητες στην ίδια μηχανή είναι 230.000 και 115 που δίνουν λόγο 1:2000 . Δεδομένου όμως του μικρού απολύτου μεγέθους του «αντιπαραδείγματος» (115) δεν μπορούμε να διακινδυνεύσουμε κάποιο σαφές συμπέρασμα[2] . Ενισχύονται ίσως οι υποψίες ότι στην Ελλάδα ο όρος «αντιπαράδειγμα» δεν χρησιμοποιείται όσο και στην Αγγλόφωνη κοινότητα. Αν μάλιστα σκεφθούμε και τον παρεμφερή όρο «non-example» με ή χωρίς συνδετικό που σημαίνει «αντιπαράδειγμα σε ορισμό» (δηλ. «παράδειγμα που δεν εκπληροί ορισμό» το «μη- παράδειγμα» όπως κατά λέξη αποδίδεται)

[2] Να γίνει σαφές ότι δεν μετράμε τις συχνότητες εμφάνισης των όρων στην γραπτή γλώσσα γενικώς , αφού οι μηχανές εμφανίζουν σελίδες που περιέχουν **τουλάχιστον** μία λέξη κλειδί ανά σελίδα. Σε κάθε περίπτωση όμως , έχομε μια προσέγγιση της πραγματικότητας.

ενισχύεται η υποψία αυτή αν και ο όρος έχει πολύ μικρή συχνότητα εμφάνισης (8.500 σε όλες τις πτώσεις ενικού και πληθυντικού , με ή χωρίς συνδετικό)

1.3. Η ερμηνεία των λεξικών

Παραθέτουμε τις ερμηνείες των ελαχίστων λεξικών που περιέχουν τον όρο «αντιπαράδειγμα» και «Counterexample»

- Ελληνοαγγλικό &Αγγλοελληνικό Ηλεκτρονικό λεξικό Magenta :

Counterexample: *Παράδειγμα καταρρίπτον θεωρία.*

Αντιπαράδειγμα: *Δεν δίδεται ερμηνεία*

- Ηλεκτρονικό μεταφραστικό πρόγραμμα SYSTRAN:

Counterexample: *Παράδειγμα εξαίρεση στον κανόνα*

Αντιπαράδειγμα: *Δεν δίδεται ερμηνεία*

- Dictionary of Mathematics (G.Eisenreich-R.Sube) : Παρατίθενται οι όροι σε Αγγλικά , Γαλλικά , Γερμανικά , αντιστοίχως κι ως εξής:

Counterexample, contre-exemple , Gegenbeispiel .

Μεταφραστική μηχανή Alta-Vista :

Ισπανικά -contraejemplo , Ιταλικά- contro-esempio , Ρωσσικά контрпример

- Νεοελληνικό λεξικό Μπαμπινιώτη:*Παράδειγμα που ανατρέπει την ισχύ υπόθεσης, άποψης κτλ. η οποία (υπόθεση) βασίζεται σε άλλα παραδείγματα. «Στο άρθρο της παρουσιάζει αντιπαραδείγματα στην υπόθεση που είχε διατυπώσει ο συνάδελφός της.» ΕΤΥΜΟΛΟΓΙΑ: Μεταφρασμένο δάνειο της Αγγλικής counter-example*

Να επισημάνουμε , ότι ουσιαστικά τα μόνα Ελληνικά λεξικά που περιέχουν τον όρο αντιπαράδειγμα είναι της Magenta και του κ. Μπαμπινιώτη , κοινό χαρακτηριστικό των οποίων είναι η σύγχρονη λεξικογραφία.

1.4 Μια καινούργια υπόθεση για το ρήμα «αντιπαραδείκνυμι»

Τα αρχαία Ελληνικά λεξικά περιέχουν το λήμμα «αντιπαραδείκνυμι» από το οποίο θα μπορούσε να παραχθεί το ουσιαστικό «αντιπαράδειγμα»

Όμως, το μοναδικό Ελληνικό λεξικό που αναφέρεται και σωστά στον όρο είναι του κ. Μπαμπινιώτη το οποίο όμως αποφαίνεται ότι πρόκειται για νεολογισμό-μετάφραση του counter-example όπου η κατά λέξη απόδοσή του είναι «ενάντιο-παράδειγμα»

Τα τρία πιο έγκυρα λεξικά που έχομε αναφέρουν:

- **Henry G. Liddell-Robert Scott**: Παραβάλω , συγκρίνω αντιπαρατίθημι, (τινά τινί) (:=Με κάποιον/α σε κάτι)
- **Μέγα Λεξικόν ελληνικής Γλώσσης Δ. Δημητράκου , 9τ.**: αντιπαραβάλλω προβάλω προς σύγκρισιν αντιπαραθέτω.
- **Λεξικόν Αρχαίας Ελληνικής Σταματάκου** : Παραβάλλω συγκρίνω

«Τον Ιωάννην αντιπαραξείξαι τω διδασκάλω» Γρ. Νύσσης 2,919C

Μια εκτενέστερη και εκτεταμένη αναζήτηση στον «Θησαυρό της Ελληνικής Γλώσσης» όπου το λογισμικό αναζήτησης ερευνά το σύνολο της αρχαίας Γραμματείας, βρήκαμε ότι το θέμα «αντιπαραδ*» εμφανίζεται μόνο στον Γρηγόριο Νύσσης .

Εκεί εμφανίζονται τρία μόνο αποτελέσματα στην αναζήτηση, σε ένα των οποίων γίνεται χρήση ενός καθαρού αντιπαραδείγματος.

ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΑΝΘΡΩΠΟΥ(□□□□176 στίχοι 46-53).

Οἷον εἴ τις τὸν ἀληθῆ δείξειεν
ἄρτον, φαμὲν τὸν τοιοῦτον κυρίως ἐπιλέγειν τῷ
ὑποκειμένῳ τὸ ὄνομα. Εἰ δέ τις τὸν ἀπὸ λίθου τεχνη-
θέντα τῷ κατὰ φύσιν ἀντιπαραδείξειεν, ᾧ σχῆμα
μὲν τὸ αὐτὸ, καὶ τὸ μέγεθος ἶσον, καὶ ἡ τοῦ χρώ-
ματος ὁμοιότης, ὥστε διὰ τῶν πλείστων τὸν αὐτὸν
εἶναι τῷ πρωτοτύπῳ δοκεῖν, ἐπιλείπει δὲ αὐτῷ τὸ
καὶ τροφὴν δύνασθαι εἶναιῥ παρὰ τοῦτο οὐ κυρίως,
ἀλλ᾽ ἐκ καταχρήσεως τῆς ἐπωνυμίας τοῦ ἄρτου τε-
τυχηκέναι τὸν λίθον λέγωμεν.

(Απόδοση δική μας): *Είναι το ίδιο με το σαν να ήθελε κάποιος να υποδείξει το αληθινό καρβέλι και να λέμε ότι πρέπει να το επιλέγουμε κυρίως*

από το εάν ονομάζεται έτσι. Αν όμως αντιπαραβάλλει κάποιος ένα τεχνητό, ως προς την φυσική του υπόσταση, από πέτρα, με ίσο μέγεθος , ίδιο σχήμα και όμοιο χρώμα , ώστε σύμφωνα με τα περισσότερα χαρακτηριστικά του γνωρίσματα να θεωρείται ότι είναι ίδιο με το πρωτότυπο και να υπολείπεται μόνο το χαρακτηριστικό του να είναι βρώσιμο, παρ ΄όλα αυτά όχι κατά κανόνα αλλά καταχρηστικά, την πέτρα την λέμε καρβέλι.

Το νόημα συνοπτικά: *Ο Γρηγόριος Νύσσης λέει, ότι όταν λέμε «άρτος» λέμε αυτόν που υπόκειται στο όνομα κατά όλα τα χαρακτηριστικά του, αλλιώς θα έπαιρνε κάποιος ένα καρβέλι από πέτρα με ίδιο σχήμα ίδιο χρώμα και ίσο μέγεθος το οποίο βεβαίως δεν τρώγεται και θα το έλεγε « άρτο». Και ναι μεν λέμε άρτο, τον λίθο, αλλά καταχρηστικά.*

Είναι φανερό , ότι η χρήση του ρήματος αντιπαραδείκνυμι στο ανωτέρω εδάφιο , γίνεται με την έννοια «αντιπαράδειγμα σε ορισμό». (Αληθής άρτος) Δεν αποκλείεται βεβαίως ο όρος αντιπαράδειγμα να είναι όντως μετάφραση – νεολογισμός εκ της Αγγλικής, αλλά νομίζομε ότι αυτό το εύρημα θα πρέπει να προβληματίσει στο εάν και κατά πόσον ο ανώνυμος γλωσσοπλάστης περιορίσθηκε στην μετάφραση του Αγγλικού όρου, δημιούργησε λέξη χωρίς να γνωρίζει την ύπαρξη αντιστοίχου ρήματος ή (όπως βασίμως υποπτευόμεθα) απέδωσε έναν όρο έχοντας υπ΄ όψιν του και το αρχαίο ρήμα και την σημασία του.

1.5 Αρχαίες χρήσεις του Αντιπαραδείγματος

Το αντιπαράδειγμα είναι μια έννοια που χρησιμοποιήθηκε στην Λογική και κατ΄ επέκτασιν ως συστατικό της φαρέτρας επιχειρημάτων σε συζητήσεις και αντιπαραθέσεις φιλοσοφικού ή άλλου περιεχομένου. Καταγράψαμε δύο χρήσεις του που προκύπτουν από αρχαίες γραπτές πηγές.

Η πρώτη αφορά τον διάλογο του Πλάτωνος **«Γοργίας»** όπου ο Καλλικλείς συνδιαλεγόμενος με τον Σωκράτη, διαφωνεί για τον ορισμό του «βελτίου» και του «κρείσσονος –ισχυρού». Ο Καλλικλείς φρονεί ότι οι έννοιες αυτές συμπίπτουν . Τότε ο Σωκράτης του επισημαίνει ότι σύμφωνα με αυτά που ισχυρίζεται ο Καλλικλείς θεωρεί του δούλους καλύτερους από αυτόν , αφού

αν μαζευτούν πολλοί θα είναι ισχυρότεροι , άρα ….καλύτεροι! Είναι σε ένα σημείο του διαλόγου, στο οποίο έχει κορυφωθεί η διαφωνία περί της διακρίσεως βελτίωνος και αμείνωνος . και ο Σωκράτης χρησιμοποιεί την λεγόμενη «Σωκρατική ειρωνεία» κάνοντας μάλιστα τον Καλλικλεί να χάσει την ψυχραιμία του. Πρόκειται δηλ. για «αντιπαράδειγμα σε ορισμό» λίαν ενδιαφέρον που φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα : (Στέφανος, σελ .429 - παρ. b στ.7 έως e στ.4)

……………………………………………………………………………

ΚΑΛ. Οὑτοσὶ ἀνὴρ οὐ παύσεται φλυαρῶν. εἰπέ μοι, ὦ Σώκρατες, οὐκ αἰσχύνῃ τηλικοῦτος ὢν ὀνόματα θηρεύων, καὶ ἐάν τις ῥήματι ἁμάρτῃ, ἕρμαιον τοῦτο ποιούμενος; **ἐμὲ γὰρ οἴει ἄλλο τι λέγειν τὸ κρείττους εἶναι ἢ τὸ βελτίους; οὐ πάλαι σοι λέγω ὅτι ταὐτόν φημι εἶναι τὸ βέλτιον καὶ τὸ κρεῖττον; ἢ οἴει με λέγειν, ἐὰν συρφετὸς συλλεγῇ δούλων καὶ παντοδαπῶν ἀνθρώπων μηδενὸς ἀξίων πλὴν ἴσως τῷ σώματι ἰσχυρίσασθαι, καὶ οὗτοι φῶσιν, αὐτὰ ταῦτα εἶναι νόμιμα;**

ΣΩ. Εἶεν, ὦ σοφώτατε Καλλίκλειςῥ οὕτω λέγεις;

ΚΑΛ. Πάνυ μὲν οὖν.

ΣΩ. Ἀλλ' ἐγὼ μέν, ὦ δαιμόνιε, καὶ αὐτὸς πάλαι τοπάζω τοιοῦτόν τί σε λέγειν τὸ κρεῖττον, καὶ ἀνερωτῶ γλιχόμενος σαφῶς εἰδέναι ὅτι λέγεις. οὐ γὰρ δήπου σύ γε τοὺς δύο βελτίους ἡγῇ τοῦ ἑνός, **οὐδὲ τοὺς σοὺς δούλους βελτίους σοῦ, ὅτι ἰσχυρότεροί εἰσιν ἢ σύ**. ἀλλὰ πάλιν ἐξ ἀρχῆς εἰπὲ τί ποτε λέγεις τοὺς βελτίους, ἐπειδὴ οὐ τοὺς ἰσχυροτέρους; καὶ ὦ θαυμάσιε πρᾳότερόν με προδίδασκε, ἵνα μὴ ἀποφοιτήσω παρὰ σοῦ.

ΚΑΛ. Εἰρωνεύῃ, ὦ Σώκρατες.

ΣΩ. Μὰ τὸν Ζῆθον, ὦ Καλλίκλεις, ᾧ σὺ χρώμενος πολλὰ νυνδὴ εἰρωνεύου πρός μεῥ ἀλλ' ἴθι εἰπέ, τίνας λέγεις τοὺς βελτίους εἶναι;

………………………………………………………………..

Περισσότερο καθαρό είναι το δεύτερο αντιπαράδειγμα σε ορισμό που μας διηγείται ο Διογένης ο Λαέρτιος στους «Βίους Φιλοσόφων» . Αποδίδεται στον Διογένη τον Κυνικό, ο οποίος θέλησε να γελοιοποιήσει τον λανθασμένο ορισμό του Πλάτωνα περί ανθρώπου , όπου σύμφωνα με τον Δ.Λαέρτιο , ο Πλάτων είχε ισχυρισθεί ότι ο άνθρωπος είναι όν άπτερον δίπουν. Τότε , ο Δ. Κυνικός ξεπουπούλιασε έναν κόκορα και τον εισήγαγε στην σχολή του Πλάτωνος λέγοντας , «Ιδού ο άνθρωπος του Πλάτωνος!» Και από τότε έκανε διόρθωση του ορισμού ο Πλάτων εισάγοντας στον ορισμό την επί πλέον προϋπόθεση να είναι και…..πλατυώνυξ!

Πέραν του γλαφυρού της ιστορίας, βλέπομε την χρησιμότητα του αντιπαραδείγματος στην κατάδειξη των λανθασμένων ορισμών , και στην βελτίωση των υποθέσεων στην επιστημονική έρευνα. Μπορούμε επί πλέον να πούμε ότι και το συγκεκριμένο παράδειγμα του Διογένους του Κυνικού είναι και εξόχως παιδαγωγικό , λόγω του ότι είναι εντυπωσιακό ,ενώ η έμπρακτη κατασκευή του (μη λεκτική) ήταν παραστατική και άρα καταλυτική για την διόρθωση του ορισμού εκ μέρους του Πλάτωνος!

Παραθέτουμε το πρωτότυπο απόσπασμα το οποίο είναι πλήρως κατανοητό:

Πλάτωνος ὁρισαμένου, ῎Ανθρωπός ἐστι ζῷον δίπουν ἄπτερον, καὶ εὐδοκιμοῦντος, τίλας ἀλεκτρυόνα εἰσήνεγκεν αὐτὸν εἰς τὴν σχολὴν καί φησιν, ῞οὗτός ἐστιν ὁ Πλάτωνος ἄνθρωπος.῎ ὅθεν τῷ ὅρῳ προσετέθη τὸ πλατυώνυχον.

(Διογένης Λαέρτιος, «Βίοι Φιλοσόφων» Βιβλίο 6 παρ.40 στ. 5-9)

2. Επιστημολογία και αντιπαράδειγμα

Η θέση του αντιπαραδείγματος στην επιστημολογία κατέχει κύρια θέση και ειδικά παίζει θεμελιώδη ρόλο στην διαψευσιοκρατία. .

Η διαψευσιοκρατία είναι μια σχολή με κύριους εκπροσώπους τους Poppert και Lakatos , η οποία αναπτύχθηκε κυρίως ως αντίθεση στην ατελή (μη μαθηματική) επαγωγή που χρησιμοποιούν όλες οι επιστήμες πλην των μαθηματικών για να ερμηνεύσουν , περιγράψουν και προβλέψουν διάφορα φαινόμενα. Σύμφωνα με τους διαψευσιοκράτες, όσες παρατηρήσεις και να έχουμε στην διάθεσή μας, είναι αδύνατον να βγάλουμε έγκυρους καθολικούς νόμους και θεωρίες , πράγμα που κάνουν οι Επαγωγιστές. Από την άλλη πλευρά , είναι δυνατόν μόνο με ενικές παρατηρησιακές αποφάνσεις , να διαψεύσουμε γενικούς νόμους εκτελώντας λογικές πράξεις.

Παραδείγματος χάριν:

Έχοντας δεδομένη την απόφανση «Ένα κοράκι που δεν ήταν μαύρο παρατηρήθηκε στην θέση χ την ώρα t» , έπεται λογικά ότι η απόφανση «όλα τα κοράκια είναι μαύρα» είναι ψευδής . Δηλ. το επιχείρημα :

Προκείμενη: Ένα κοράκι το οποίο δεν ήταν μαύρο, παρατηρήθηκε στην θέση χ κατά την χρονική στιγμή t
Συμπέρασμα: Δεν είναι όλα τα κοράκια μαύρα

συνιστά έναν λογικώς έγκυρο παραγωγικό συλλογισμό.

Το παρατηρηθέν μη μαύρο κοράκι συνιστά **αντιπαράδειγμα** στον ισχυρισμό της πρότασης *«Όλα τα κοράκια είναι μαύρα»*
Άλλο παράδειγμα:

Αν με κάποιο τρόπο παρατηρούσαμε ότι δύο σώματα μαζών 1Kgr και 10Kgr αντιστοίχως εκτελούν ελεύθερη πτώση σε χρόνους που δεν είναι ανάλογοι των μαζών και εντός των ορίων σφαλμάτων των μετρήσεων, τότε έχουμε βρει ένα αντιπαράδειγμα στον νόμο της πτώσης των σωμάτων κατ΄ Αριστοτέλη. Ο Αριστοτέλης έλεγε ότι τα σώματα εκτελούν εντός του αέρα ελεύθερη πτώση σε χρόνους αναλόγους των βαρών τους , ενώ ένα σώμα βουλιάζει σε διαφορετικά υγρά σε χρόνους αντιστρόφως αναλόγους των ειδικών βαρών τους.[3]

[3] Σήμερα φαίνεται εξαιρετικά περίεργη η μη διάψευση ενός τέτοιου χοντροκομμένου νόμου για την ελεύθερη πτώση, δεδομένου ότι στην αρχαιότητα και χρονόμετρα υπήρχαν και ζυγοί ικανοποιητικής ακριβείας ώστε τουλάχιστον να μετρούν το μη δεκαπλάσιον του χρόνου πτώσης. Πρέπει να δεχθούμε ότι εδώ βρήκε εφαρμογή η απέχθεια που ένοιωθαν οι αρχαίοι προς

Ιστορικό είναι και ένα άλλο αντιπαράδειγμα που έχει χρησιμοποιήσει ο Leibnitz μαζί με χρήση της εις άτοπον απαγωγής ενάντια στους διατυπωθέντες νόμους της κίνησης από τον Descartes . Συγκεκριμένα είπε:

Νόμος 1: Αν δύο σώματα Α, Β με ίσες μάζες και αντίθετες ταχύτητες , συγκρουσθούν κεντρικά , τότε ανταλλάσσουν ταχύτητες , κινούμενα αντίρροπα.

Νόμος 2 : Αν δύο σώματα Α, Β με διαφορετικές μάζες και αντίρροπες ταχύτητες συγκρουσθούν κεντρικά, τότε το σώμα μεγαλύτερης μάζας συνεχίζει την κίνησή του με την ίδια ταχύτητα, ενώ το σώμα με την μικρότερη μάζα λαμβάνει την ταχύτητα του μεγαλυτέρου.

Ο Leibniz επιχειρηματολόγησε ως εξής: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διαφορά των μαζών γίνεται οσοδήποτε μικρή . Τότε για μια απειροελάχιστη διαφορά στην μάζα , θα ισχύει και ο νόμος 1 και ο νόμος 2 . Δηλαδή **, η αιτία της απειροελάχιστης διαφοράς μάζας, προκαλεί την μεγαλύτερη δυνατή διαφορά στο αποτέλεσμα. Αλλά , ως γνωστόν, η φύση δεν κάνει άλματα**

Σήμερα θα λέγαμε ότι αν ισχύει ο νόμος 1 και μετακινηθεί ένα ηλεκτρόνιο από το σώμα Α στο σώμα Β , θα προκληθεί η μέγιστη δυνατή διαφορά στο αποτέλεσμα.[4]

Το κυριότερο χτύπημα του Popper εναντίον του θεμελιακού χαρακτήρα της γνώσης δίνεται στο **πρόβλημα της επαγωγής**. Εκεί επικεντρώνει ο Popper την κύρια αντίθεσή του στον **θετικισμό**, επιστρέφοντας στα παλιά σχετικά επιχειρήματα του David Hume εναντίον του επαγωγικού συμπερασμού . Για παράδειγμα, επειδή όλοι οι κύκνοι που παρατηρήθηκαν ως κάποια χρονική στιγμή είναι λευκοί, δεν σημαίνει ότι υπάρχουν οι λογικές βάσεις για να αποκλεισθεί ότι σε μια επόμενη παρατήρηση μπορεί να βρεθεί ένας μαύρος κύκνος (κάτι που έχει στην πραγματικότητα συμβεί με την ανακάλυψη μαύρων

πάσα μορφή πρακτικής ενασχόλησης όπως είναι οι μετρήσεις , αφού πίστευαν ότι η προσέγγιση της γνώσης γίνεται μόνο με τον νου.
Τον νόμο της πτώσης του Αριστοτέλη διέψευσε εφυιέστατα ο Γαλιλαίος , ο οποίος έριξε δύο πόρτες ιδίου σχήματος 2 φορές από γκρεμό. Η μία ήταν σιδερένια και η άλλη ξύλινη (ελαφρύτερη) . Την μια φορά έβαλε την ξύλινη κάτω και την σιδερένια πάνω και την άλλη εναλλάξ. Και τις δύο φορές οι πόρτες έφθασαν μαζί κάτω. Αν ίσχυε ο νόμος του Αριστοτέλη , θα έπρεπε να παρατηρηθεί την πρώτη φορά ταυτόχρονη άφιξη , αφού η σιδερένια θα ωθούσε την ξύλινη, αλλά την δεύτερη θα έπρεπε να παρατηρηθεί απόκλιση , καθώς η σιδερένια θα απεσπάτο από την ξύλινη, πράγμα που δεν παρετηρήθη!

[4] Το επιχείρημα του Leibnitz φαίνεται να προέρχεται κατ΄ ευθείαν από τον απειροστικό λογισμό και την λογική των απειροστών ποσοτήτων με τις οποίες κατετρίβετο.

κύκνων στην Αυστραλία). Σύμφωνα με τον Hume η επαγωγική λογική οδηγεί σε μια ατέλειωτη αναδρομή με την έννοια ότι, επειδή δεν ξέρουμε αν μια ακόμη παρατήρηση θα επαληθεύσει ή θα διαψεύσει την υπόθεσή μας, για αυτό χρειάζεται να την κάνουμε, βρισκόμενοι όμως πάλι στην ίδια κατάσταση, οπότε ξανακάνουμε την παρατήρηση κοκ. Με άλλα λόγια, ενώ το γενικό αναφέρεται σε μια απειρία περιπτώσεων, οι εμπειρικές παρατηρήσεις του ειδικού περιορίζονται να ελέγξουν μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος από αυτές, οπότε ποτέ δεν είμαστε σίγουροι αν η επόμενη περίπτωση δεν θα παραβιάσει τον γενικό κανόνα.

Για να βγει από το αδιέξοδο αυτό της επαγωγικής λογικής, ο Popper διαμορφώνει έναν άλλο τρόπο συμπερασμού , στον οποίον αντικαθιστά την αρχή της επαλήθευσης με την αρχή της διάψευσης. Η επιστημολογική μέθοδος του Popper, βασίζεται σε ***εικασίες*** **και** ***ανασκευές***. Είναι επίσης γνωστή όπως προείπαμε ως ***διαψευσιοκρατία*** ή μέθοδος ***δοκιμής και λάθους***. Σύμφωνα με αυτήν, η επιστήμη δεν ξεκινά από τις παρατηρήσεις, για να προχωρήσει μετά σε επαγωγικές συναγωγές, όπως ισχυρίζονται οι επαγωγιστές. Αντιθέτως, αρχικά τίθενται κάποιες εικασίες, δηλαδή, υποθετικά συμπεράσματα, τα οποία στη συνέχεια οι επιστήμονες υποβάλλουν σε εμπειρικές δοκιμασίες προσπαθώντας να τα ανασκευάσουν κρατώντας απέναντί τους μια κριτική στάση και πειραματιζόμενοι με εναλλακτικές υποθέσεις. Στην θέση λοιπόν της επαγωγικής λογικής (τη συναγωγή από το ειδικό στο γενικό), ο Popper βάζει την **παραγωγική λογική** (τη συναγωγή από το γενικό στο ειδικό) μέσω της διάψευσης (ανασκευής) μιας υπόθεσης (εικασίας).

Μια επιστημονική θεωρία, που επιβιώνει μετά από ένα σημαντικό πλήθος κριτικών ελέγχων και πειραματικών δοκιμασιών, μπορεί να γίνει μόνο προσωρινά αποδεκτή, **ποτέ σε οριστική βάση**, μέχρις ότου συμβεί να απορριφθεί σε κάποια ενδεχόμενη μελλοντική δοκιμασία. Με άλλα λόγια, καμιά θεωρία δεν είναι για τον Popper επαληθεύσιμη, απλώς μπορεί να έχει υψηλό βαθμό εμπειρικής ενίσχυσης (corroboration), κάτι που σημαίνει ότι **όλες οι επιστημονικές θεωρίες είναι κατά κανόνα διαψεύσιμες.** Επιπλέον, πολλές φορές, υπάρχουν επιστημονικές θεωρίες, που μολονότι ήδη έχουν διαψευσθεί, συνεχίζουν να γίνονται αποδεκτές. Σαν ένα τέτοιο παράδειγμα ο Popper συνήθιζε να φέρνει τη Νευτώνεια μηχανική. Η θεωρία του Νεύτωνα βρισκόταν σε μια εντυπωσιακή συμφωνία με την παρατήρηση και το πείραμα από τον

καιρό που πρώτο-εμφανίσθηκε (το 1687) ως το 1900. Στην περίοδο όμως 1900-20 βρέθηκε να μην είναι ακριβής από την άποψη της σχετικιστικής μηχανικής, χωρίς όμως να έχει από τότε εγκαταλειφθεί

3.Λογική και αντιπαράδειγμα

3.1. Ο Μαθηματικός ορισμός του αντιπαραδείγματος

Ένας βασικός νόμος της λογικής, είναι ο νόμος **της αποκλίσεως μέσου ή τρίτου** του Αριστοτέλη. Σύμφωνα με αυτόν, για κάθε λογική πρόταση Ρ, ή θα είναι αληθής η Ρ , ή θα είναι αληθής η αντίθετής της , η $\neg$Ρ.
Δηλ. η Ρ είναι αληθής εάν και μόνον εάν η $\neg$Ρ είναι ψευδής και επίσης , η $\neg$Ρ είναι αληθής εάν και μόνον εάν η Ρ είναι ψευδής.

Ο παραπάνω νόμος ισχύει στα πλαίσια της Αριστοτέλειας λογικής ή όπως αλλιώς λέμε στα πλαίσια της **δίτιμης λογικής** Δηλ. κάθε πρόταση Ρ μπορεί να λάβει **δύο μόνο τι**μές :Α (αληθής) ή Ψ (ψευδής)
Τα παραπάνω λ.χ. μας επιτρέπουν να χαρακτηρίσουμε παράλογο το ερώτημα : ***«Μπορεί ο Θεός ως Παντοδύναμος να κατασκευάσει μια πέτρα που να μην μπορεί να την σηκώσει;»*** Διότι ισοδυνάμως είναι ως αν να ερωτάμε εάν ο Θεός μπορεί ταυτοχρόνως να είναι «Παντοδύναμος» και «όχι Παντοδύναμος» δηλ. μια πρόταση Ρ να είναι αληθής και ταυτοχρόνως να είναι αληθής και η $\neg$Ρ, πράγμα που αποκλείει η Αριστοτέλεια Λογική.

Υπάρχουν βεβαίως και **πλειότιμες Λογικές** όπου μια πρόταση Ρ δεν είναι αληθής ή ψευδής αλλά έχει ένα βαθμό αληθείας μεταξύ 0 και 1 .
Υπάρχουν επίσης Μαθηματικές σχολές όπως αυτή του Ολλανδού **Brouwer** , η σχολή του **Ενορατισμού ή Ιντουσιονισμού** όπου η μέθοδος απόδειξης της εις άτοπον απαγωγής δεν ισχύει , απαιτούνται και πρόσθετες προϋποθέσεις για την συνεπαγωγή , και επίσης κάθε απόδειξη θα πρέπει να είναι κατασκευάσιμη, σύμφωνα με μια στενή έννοια κατασκευασιμότητας.

Στις πλειότιμες λογικές και στα κατασκευαστικά –Ιντουσιονιστικά Μαθηματικά δεν έχει θέση η λογική του αντιπαραδείγματος όπως θα παρουσιασθεί εδώ, αλλά μόνο στην κοινή- γνωστή μας , Αριστοτέλεια Λογική.

Προτασιακός τύπος	**Είναι αληθής**	**Είναι ψευδής**
$(\forall x)[P(x)]$	Αν για όλα τα χ, η Ρ(χ) είναι αληθής	Αν για ένα τουλάχιστον χ, η Ρ(χ) είναι ψευδής
$(\exists x)[P(x)]$	Αν για ένα τουλάχιστον χ,η Ρ(χ) είναι αληθής	Αν για όλα τα χ, η Ρ(χ) είναι ψευδής.
$(\forall x)[\neg P(x)]$	Αν για όλα τα χ ,η Ρ(χ) είναι ψευδής	Αν για ένα τουλάχιστον χ , η Ρ(χ) είναι αληθής
$(\exists x)[\neg P(x)]$	Αν για ένα τουλάχιστον χ, η Ρ(χ) είναι ψευδής.	Αν για όλα τα χ, η Ρ(χ) είναι αληθής.

Επειδή το αντιπαράδειγμα σχετίζεται άμεσα με τους ποσοδείκτες $\forall$ και $\exists$ (: «Δια κάθε» και «υπάρχει») παραθέτουμε έναν πίνακα με την σημασία τους στις προτάσεις :

Από τον ανωτέρω πίνακα , παρατηρούμε , ότι :

$$\neg((\forall x)[P(x)]) \Leftrightarrow (\exists x)[\neg P(x)]$$

$$\neg((\exists x)[P(x)]) \Leftrightarrow (\forall x)[\neg P(x)]$$

Σύμφωνα με τις προηγούμενες ταυτολογίες, είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό του αντιπαραδείγματος:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εάν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση «$\forall x : P(x)$» είναι ψευδής, πρέπει κι αρκεί να αποδείξουμε ότι η πρόταση «$\exists x : \neg P(x)$» είναι αληθής. Δηλαδή , πρέπει να βρούμε ένα στοιχείο x_0 του σχετικού συνόλου αναφοράς έτσι ώστε η Ρ(x_0) να είναι ψευδής.

Το x_0 θα λέγεται τότε **αντιπαράδειγμα** στην πρόταση «$\forall x : P(x)$»

Σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό η έννοια αντιπαράδειγμα εννοείται ως **«ενάντιο παράδειγμα»** δηλαδή **«παράδειγμα ενάντια σε ισχυρισμό»** . Όταν όμως ένα παράδειγμα δεν πληροί έναν ορισμό , εκτός από «αντιπαράδειγμα» το χαρακτηρίζουμε και ως **«μη – παράδειγμα»** Αλλά, όπως η πρόταση –ισχυρισμός καθορίζει παραδείγματα δύο κλάσεων , αυτή των παραδειγμάτων που τον ικανοποιούν και αυτή των παραδειγμάτων που δεν την ικανοποιούν , ομοίως και ένας ορισμός , ορίζει δύο αντίθετες κλάσεις , αυτή των παραδειγμάτων που τον ικανοποιούν και την κλάση των παραδειγμάτων που δεν τον ικανοποιούν. Έτσι, αναλογικά, , λέμε και το μη-παράδειγμα σε ορισμό (παράδειγμα μη εκπληρόν τον ορισμό) και αυτό αντιπαράδειγμα .

Εδώ υπάρχει και ένα λεπτό σημείο : Ο ξεπουπουλιασμένος κόκορας του Διογένη του Κυνικού , ήταν **παράδειγμα στον ορισμό** του Πλάτωνος και **μη-παράδειγμα (αντιπαράδειγμα) σε άλλον (κοινής αποδοχής-υπονοούμενο) ορισμό** .

3.2. Τα είδη του αντιπαραδείγματος

Η γενική ταξινόμηση των αντιπαραδειγμάτων σε σχέση με την μορφή τους περιλαμβάνει τρεις βασικές-γενικές κατηγορίες, αλλά και πολλές ειδικές :

<u>1.Ειδικό –αριθμητικό αντιπαράδειγμα</u>: Είναι αυτό που δεν δίνει καμία πληροφορία για τον τρόπο κατασκευής του , αλλά ούτε και πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε άλλο παρόμοιο αντιπαράδειγμα.

λ.χ. **ειδικό** αντιπαράδειγμα συνεχούς συναρτήσεως είναι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \ f(x)=\begin{cases}1\ , & \alpha\nu\ \chi\ \rho\eta\tau o\varsigma\\ -1\ , & \alpha\nu\ \chi\ \alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma\end{cases}$ που είναι παντού ασυνεχής.

<u>2. Ημι-γενικό αντιπαράδειγμα</u> : Είναι αυτό που μας δίνει πληροφορία για τον τρόπο κατασκευής του , μπορούμε από αυτό να κατασκευάσουμε πολλά ειδικά (συνήθως άπειρα) αλλά δεν καλύπτει όλη την υπάρχουσα κλάση αντιπαραδειγμάτων. Λόχου χάριν , ημιγενικό αντιπαράδειγμα συνεχούς συνάρτησης είναι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}a\ , & x\ \rho\eta\tau o\varsigma\\ \beta\ , & x\ \alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma\end{cases}\ \mu\varepsilon\ \alpha\neq\beta,\ \forall\chi\in\mathbb{R}$$

Είναι **ημιγενικό αντιπαράδειγμα** , αφού για τις διάφορες τιμές των α, β λαμβάνουμε απειρία αντιπαραδειγμάτων τα οποία όμως φυσικά , δεν καλύπτουν όλα τα αντιπαραδείγματα, αφού λ.χ. η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=\left\{\begin{matrix} h(x)\ ,\ x\ \rho\eta\tau o\varsigma \\ t(x)\ ,\ x\ \alpha\rho\rho\eta\tau o\varsigma \end{matrix}\right\}\ \mu\varepsilon\ (h,t,\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\varepsilon\iota\varsigma\ \sigma\tau o\ \mathbb{R})\ \kappa\alpha\iota\ h(x)\neq t(x)\forall\chi\in\mathbb{R}$$

είναι ένα **ημιγενικότερο αντιπαράδειγμα** , μιας και καλύπτει την προηγούμενη κλάση και είναι ευρύτερη αυτής. αλλά και πάλι , δεν καλύπτεται η κλάση όλων των αντιπαραδειγμάτων. Όσο κι αν γενικεύσουμε το προηγούμενο αντιπαράδειγμα εισάγοντας πεπερασμένους στο πλήθος ή απείρους κλάδους σε ισάριθμες διαμερίσεις του R , ή μεταβάλλοντας το πεδίο ορισμού, δεν θα μπορέσουμε να καλύψουμε με μια αναλυτική έκφραση την κλάση των παντού ασυνεχών συναρτήσεων. Αυτή την κλάση την καλύπτει (όταν υπάρχει) το :

3. Γενικό αντιπαράδειγμα : Είναι το αντιπαράδειγμα που αποκαλύπτει γιατί μια πρόταση είναι λάθος και προτείνει τρόπο παραγωγής ολόκληρης της κλάσης αντιπαραδειγμάτων. Για να συνεχίσουμε στο ίδιο θέμα της συνέχειας, **ως γενικό αντιπαράδειγμα συνεχούς** συναρτήσεως σε διάστημα Δ , θα μπορούσαμε να πάρουμε την $g:\Delta\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ g(x)=\left\{\begin{matrix} f(x) & ,x\neq x_0 \\ a\neq f(x_0) & ,x=x_0 \end{matrix}\right\}$ με $f(x)$ συνεχή συνάρτηση στο Δ , που μας δίνει τον γενικό τρόπο κατασκευής ασυνεχούς συνάρτησης σε ένα μόνο σημείο της .

Αυτό φαίνεται καλύτερα όταν παραλείπουμε σε μια πρόταση μια **αναγκαία συνθήκη** για την ισχύ της πρότασης. Τότε, όσα παραδείγματα δεν ικανοποιούν την συνθήκη, δεν ικανοποιούν και την πρόταση. Στο θεώρημα του Bolzano η συνθήκη να μην έχει σταθερό πρόσημο η συνάρτηση στο διάστημα [α,β] είναι αναγκαία. Επομένως κάθε συνάρτηση που έχει σταθερό πρόσημο σε ένα διάστημα δεν έχει και ρίζα σε αυτό το διάστημα και άρα δεν πληροί το θ. Bolzano Έτσι ένα γενικό αντιπαράδειγμα στο θ. Bolzano είναι κάθε συνάρτηση f: $[a,b]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει f(x)>0 $\forall x\in[a,\beta]$ ή f(x)<0 $\forall x\in[a,\beta]$. Βεβαίως υπάρχουν και άλλα γενικά παραδείγματα συναρτήσεων που δεν διατηρούν σταθερό πρόσημο στο [α,β] και δεν πληρούν το θ. Bolzano , διότι δεν είναι συνεχείς ή είναι μεν συνεχείς, αλλά δεν έχουν ετερόσημες τιμές στα άκρα α, β , όπως και άλλα που τα εξετάζουμε στο οικείο κεφάλαιο.

Πέραν όμως αυτής της γενικής κατηγοριοποίησης, υπάρχουν και **ειδικές κατηγοριοποιήσεις** ανάλογα με άλλα χαρακτηριστικά του αντιπαραδείγματος. Παραθέτουμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 1. Έστω η πρόταση: «$\forall x \in \mathbb{R} : |x| \neq 0$» **.** Το στοιχείο χ_0=0 είναι **ένα αντιπαράδειγμα** στην πρόταση , αφού $0 \in \mathbb{R}$ και |0|=0 . Προφανώς , για την συγκεκριμένη πρόταση , είναι και το **μοναδικό αντιπαράδειγμα.**

Παράδειγμα 2.Έστω η πρόταση : «$\forall x \in \mathbb{N} : | x^2 > x$» **.** Για να δείξουμε ότι είναι ψευδής , πρέπει κι αρκεί να αποδείξουμε ότι η αντίθετή της , η «$\exists x_0 \in \mathbb{N} : x_0^2 \leq x_0$» Εδώ έχομε **δύο μόνο δυνατά αντιπαραδείγματα** , δηλ. $x_0 \in \{0,1\}$

Παράδειγμα3.(Euler) .Έστω η πρόταση :

«$\forall \nu \in \mathbb{N}$:ο αριθμός $\nu^2 + \nu + 41 \textit{είναι πρώτος}$» Ο ν_0=40 είναι ένα αντιπαράδειγμά της , αφού $40^2+40+41=40(40+1)+41=41(40+1)=41^2$.

Το 41 είναι και το **ελάχιστο αριθμητικό αντιπαράδειγμα** , αφού για ν=0,1,2,3,4,…,39 η πρόταση είναι αληθής.

Παράδειγμα 4 Έστω η πρόταση **:** «$\forall \nu \in \mathbb{N}$: $\mathbf{2^\nu > \nu^\kappa}$ » είναι αληθής μόνο αν $\nu > \kappa^2$ ($\kappa \in \mathbb{N}$) . Συνεπώς οι τιμές ν=0,1,2,3,4,…,κ^2 , συνιστούν **κ^2+1 το πλήθος αριθμητικά αντιπαραδείγματα.** Δηλ. έχω μη φραγμένο πλήθος αντιπαραδειγμάτων.

Παράδειγμα 5 . (Fermat) Έστω η πρόταση: «$\forall \nu \in \mathbb{N}$: **η ακολουθία** $\chi_\nu = 2^{2^\nu} + 1$ **είναι ακολουθία πρώτων αριθμών»** Η πρόταση είναι αληθής για ν=0 ,1,2,3,4 , όπου οι αντίστοιχοι όροι χ_0=3 , χ_1=5 , χ_2=17 , χ_3=257 , χ_4=65.537 είναι πρώτοι , αλλά όπως έδειξε ο Euler τον 18^o αιώνα καταρρίπτοντας τον ισχυρισμό του Fermat , για ν=5 , ο αριθμός $\chi_5 = 2^{2^5}$ =4.294.967.297 αναλύεται σε γινόμενο ως $641 \cdot 6700417$ και άρα είναι σύνθετος.

Παράδειγμα 6. (Εικασία Leibnitz) Έστω η πρόταση **«Ο αριθμός $\nu^\kappa - \nu$ όπου κ περιττός , διαιρείται με τον κ , για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$.»**

Η πρόταση είναι αληθής για ν=3, 5,7 όπως ο ίδιος ο Leibnitz απέδειξε , αλλά ο ίδιος γρήγορα βρήκε ένα αντιπαράδειγμα στην εικασία του , αφού ο αριθμός 2^9-2 =510 , δεν διαιρείται με το 9 .(**ιστορικό αντιπαράδειγμα**)

Παράδειγμα 7. Έστω η πρόταση: **«Ο αριθμός $A=991\nu^2+1$, δεν είναι τέλειο τετράγωνο»**

Η ανωτέρω πρόταση δεν είναι αληθής, αλλά το μικρότερο αριθμητικό αντιπαράδειγμα που μπορεί να ευρεθεί αποδεικνύεται[5] ότι είναι ο απίστευτα μεγάλος αριθμός, τάξεως 10^{28} (:= Όσα μόρια περιέχουν περίπου 6 τόνοι σίδερο) συγκεκριμένα ο ν=12055735790331359447442538767.

Προσφύγαμε για επαλήθευση (μερική) στο πρόγραμμα Mathematica 4 , όπου πράγματι λάβαμε την εντυπωσιακή επαλήθευση , δηλ.:

$(379516400906811930638014896080)^2=991*(12055735790331359447442538767)^2+1$

(Θα μπορούσαμε να το χαρακτηρίσουμε ως **αντιπαράδειγμα , πρακτικά μεγάλης δυσκολίας)**

Παράδειγμα 8. (17ος αιώνας) «Οι αριθμοί 31, 331, 3331, 33331,…. Είναι πρώτοι» Αντιπαράδειγμα ελάχιστο : 333.333.331=17Χ19.607.843

Παράδειγμα 9. (Εικασία Euler) «Η εξίσωση $\chi^4+\psi^4+z^4=\omega^4$ δεν έχει ακέραιες λύσεις» Ο **Noam Elkis** το 1988 έδωσε το αντιπαράδειγμα : $2.682.440^4+15.365.639^4+18.760.760^4=20.615.673^4$ (όποιος αμφιβάλλει ας κάνει την επαλήθευση με το …χέρι!)

Παράδειγμα 10. «Δεν υπάρχει περιττός τέλειος αριθμός» Σε αυτή την πρόταση **δεν έχει ανακαλυφθεί** αντιπαράδειγμα, αλλά ούτε γνωρίζουμε **αν υπάρχει** τέτοιο αντιπαράδειγμα..

3.3. Λεκτικές διατυπώσεις υποκρύπτουσες αντιπαράδειγμα

Το αντιπαράδειγμα στην μαθηματική βιβλιογραφία δεν εμφανίζεται πάντα με το όνομά του. Μάλιστα αυτό αποτελεί τον κανόνα , καθώς όπως είδαμε ως λέξη καθ΄ εαυτή δεν είναι διαδεδομένη όσο θα έπρεπε , ενώ ως έννοια φυσικά ενυπάρχει αρχαιόθεν και καλύπτεται πίσω από περιφραστικές ονομασίες όπως «ειδικό παράδειγμα», «αντίθετο παράδειγμα», «μη παράδειγμα» , ή (το συνηθέστερο) απλώς «παράδειγμα» , αφού πράγματι το «αντιπαράδειγμα» είναι μεν ένα παράδειγμα όπως και όλα τα άλλα , αλλά λαμβάνει το πρόσφυμα της πρόθεσης «αντί» όταν υπάρχει πρόταση προς την οποία εναντιώνεται. **Δηλ. το αντιπαράδειγμα δεν είναι ένα είδος παραδείγματος , αλλά**

[5] Μπάμπης Τουμάσης «Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών» σελ .310 . Ο συγγραφέας παραπέμπει στον Sominsky I.S. (1975) "The Method of mathematical induction" Moscow : Mir Publishers.

χαρακτηρίζεται έτσι από την χρήση του σε κάποια συγκεκριμένη αποδεικτική διαδικασία διάψευσης ενός ισχυρισμού –προτάσεως, σύμφωνα και με τον τεθέντα ορισμό**.**

Πρέπει να αναφέρουμε, ότι τα αντιπαραδείγματα (με ένα μακροσκοπικό- εκ πρώτης όψεως –γρήγορο κριτήριο) παρατίθενται συνήθως στα «σχόλια» ή στις «παρατηρήσεις» των διδακτικών εγχειριδίων ή συγγραμμάτων έπειτα από τα θεωρήματα και τους ορισμούς. Όσο περισσότερο διδακτικό είναι ένα σύγγραμμα τόσο περισσότερο έχει φωτίσει τα διδακτικά και επιστημολογικά εμπόδια που εκ των πραγμάτων παρουσιάζονται και απαιτούν διευκρίνιση, με σχόλια και παρατηρήσεις. Τα συνήθη λάθη των σπουδαστών είναι ο καλύτερος οδηγός. Τα μαθηματικώς πιθανά ενδεχόμενα λάθη, συνήθως είναι άπειρα και υπεραριθμήσιμα στο πλήθος. Αν οι σπουδαστές προτιμούν να κάνουν πεπερασμένα , μικρού πλήθους και επαναλαμβανόμενα λάθη ,αυτό υποδηλοί κάτι εξαιρετικά σημαντικό που κρούει τον κώδωνα του διδάσκοντος ως προς την ποιότητα του μαθήματος που γίνεται στην τάξη του. Αυτό είναι ένα τεράστιο ζήτημα παιδαγωγικής υφής που θα το θίξουμε παρακάτω.

Σε ό,τι αφορά όμως το διδακτικό βιβλίο, χρειάζονται τα κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα που θα διευκρινίζουν ολόκληρο το εύρος ενός ορισμού ή όλες τις περιπτώσεις εφαρμογής ενός θεωρήματος και θα προλαμβάνουν τις συνήθεις παρανοήσεις τις οποίες γνωρίζουμε εκ προσωπικής ή συλλογικής πείρας , καταγεγραμμένης ή μη. Έμφαση θα πρέπει να δίνεται στα **«εφαπτόμενα αντιπαραδείγματα»** δηλ. σε αυτά που δεν εκπληρούν ένα θεώρημα ή έναν ορισμό «πάρα μία συνθήκη», ενώ εκπληρούν ενδεχομένως όλες τις υπόλοιπες.

Αλλά ας δούμε πώς και που υποκρύπτονται ή πώς εισάγονται ασκήσεις που απαιτούν αντιπαράδειγμα , όπως και τις αντίστοιχες λεκτικές εκφράσεις που συνήθως τα εισάγουν:

i. «Δίνεται η πρόταση P(x) και $x \in A$. Σε περίπτωση που η P(x) είναι αληθής να αποδειχθεί, άλλως να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα»

Το παραπάνω υπόδειγμα είναι ένα κλασικό υπόδειγμα άσκησης ή προβλήματος με ανοικτή διατύπωση και κλειστή απάντηση. Μπορεί να δοθεί

και με ανοικτότερη διατύπωση όπως : **«Να εξετασθεί η ισχύς της πρότασης P(x) , x$\in A$»** Συνηθέστατα το Α είναι απειροσύνολο. Τέτοιες διατυπώσεις απουσιάζουν εντελώς από τα εν χρήσει διδακτικά εγχειρίδια της Μ.Ε. ενώ συναντώνται στα Πανεπιστημιακά μαθηματικά της ημεδαπής και της αλλοδαπής.

Η έλλειψη ασκήσεων τέτοιας μορφής δεν έχει να κάνει με το αντιπαράδειγμα καθ΄ εαυτό, αλλά με την απουσία προβλημάτων ανοικτής διατύπωσης είτε ανοικτής απάντησης , τα οποία υπάρχουν στην Μ.Ε των περισσότέρων σχολείων της αλλοδαπής στην Ε.Ε. Η εναρμόνιση της Χώρας μας σε αυτό το θέμα με τα ισχύοντα έχει αρχίσει τα τελευταία χρόνια μέσω διαλόγου, που οριοθετεί, άλλοτε προφανείς όρους (όπως τι είναι άσκηση, ποία η διαφορά της από το πρόβλημα, τι σημαίνει πραγματικό πρόβλημα τι ανοικτό πρόβλημα τι κλειστό κτλ.) και άλλοτε με την νομοθετική αναγκαιότητα εισαγωγής πραγματικών προβλημάτων στην διδασκαλία μιας έννοιας ή στους εισαγωγικούς διαγωνισμούς (που ευρύτατα επισήμως και ανεπισήμως αποκαλούνται και «εξετάσεις» χωρίς να είναι[6].) Σε κάθε περίπτωση γίνονται συζητήσεις και διευκρινίζονται κάποιες ορολογίες ώστε να εννοούμε όλοι το ίδιο όταν αναφερόμεθα επί των ιδίων και να μην υπάρχει σύγχυση επί των ορισμών. Υπάρχουν βεβαίως αρκετά να γίνουν. Σε σχέση όμως με το αντιπαράδειγμα και την διδακτική του χρήση θα μπορούσε να υπάρχει αναφορά του στα διδακτικά εγχειρίδια ή στις οδηγίες προς τους διδάσκοντες τα Μαθηματικά . Μέχρι στιγμής απουσιάζουν τέτοιες αναφορές , αλλά ας ελπίσουμε ότι στο μέλλον θα εναρμονισθούμε τουλάχιστον με τα κοινώς ισχύοντα στην υπόλοιπη Ε.Ε. ή των χωρών του ΟΟΣΑ

ii. «Υπάρχει x $\in A$ που ικανοποιεί την P(x)»

Εδώ το χ , είναι αντιπαράδειγμα στην υπονοούμενη αντίθετη πρόταση , την «$\forall x \in A \ \neg P(x)$». Καμιά φορά τίθεται και με ερωτηματική διατύπωση(ανοικτή

[6] Ως «εξετάσεις» χαρακτηρίζονται οι δοκιμασίες στις οποίες πάντες οι λαμβάνοντες την βάση της βαθμολογίας λαμβάνουν επιτυχή χαρακτηρισμό , ενώ ως «διαγωνισμοί» οι δοκιμασίες στις οποίες επιτυγχάνει προκαθορισμένος αριθμός ανεξαρτήτως βαθμολογικής βάσεως είτε υπάρχει κάποια βάση ως αναγκαία προϋπόθεση, και ταυτοχρόνως ανώτατος- εκ των προτέρων- αριθμός επιτυχόντων, μικρότερος του αριθμού των διαγωνιζομένων. Με αυτούς τους ορισμούς οι Πανελλαδικές «εξετάσεις» είναι «διαγωνισμοί» Δεν αποκαλούνται με το ορθό όνομά τους , όχι λόγω άγνοιας των κοινών ορισμών , αλλά μάλλον για πολιτικούς λόγους.

διατύπωση) και έχει διδακτικό ενδιαφέρον όταν η ικανοποίηση της P(x) δεν είναι διαισθητικά προφανής. Για παράδειγμα , λέμε ότι ***«Υπάρχει συνάρτηση , η οποία είναι συνεχής στο*** $\mathbb{R}$ ***, ενώ δεν παραγωγίζεται πουθενά στο*** $\mathbb{R}$ ***»*** Εδώ η ύπαρξη είναι ενάντια στην ανθρώπινη συνήθη (αλλά και μαθηματική) διαίσθηση που λέει ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση. Ο Weierstrass έδωσε ένα τέτοιο ιστορικό αντιπαράδειγμα καταπλήσσοντας την μαθηματική κοινότητα (βλ. A.7.6. & B.17.3.1.) Αν πούμε όμως «Υπάρχει συνεχής συνάρτηση, η $f(x)=x^2$ /R » αυτό αποτελεί ένα λογικό αντιπαράδειγμα στην πρόταση «Δεν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις» είναι όμως μια τετριμμένη μαθηματικά και μια ανόητη διδακτικά περίπτωση, αφού πάντες οι άνθρωποι εγγενώς φέρουν την έννοια της συνέχειας γι αυτό και τα πρώτα παραδείγματα ιστορικά και διδακτικά ήταν και είναι μόνο συνεχείς ή κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις. Σε αυτό το πλαίσιο, δύσκολη ήταν και η αντίληψη συνάρτησης παντού ασυνεχούς , όπως είναι η συνάρτηση του Dirichlet , η οποία είναι ένα μαθηματικό αλλά συγχρόνως και ένα πολύ χρήσιμο διδακτικά αντιπαράδειγμα στην (υπονοούμενη) πρόταση «Δεν υπάρχει παντού ασυνεχής συνάρτηση στο R

iii. Να αποδειχθεί ότι η συνθήκη P(x) είναι αναγκαία για την ισχύ του συμπεράσματος του θεωρήματος Θ(x)

Σε ένα τέτοιο υπόδειγμα διατύπωσης υποκρύπτεται αντιπαράδειγμα, αφού καλούμεθα να ανακαλύψουμε ένα x_0 που ικανοποιεί την «$\neg P(x_0)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \neg\Theta(x_0)$»

Για παράδειγμα : «Δείξτε, ότι για την ισχύ της Μαθηματικής Επαγωγής ο έλεγχος της P(ν) για ν=1 , είναι απαραίτητος».

Μπορούμε να θεωρήσουμε την P(ν): «ν=ν+1». Τότε , αν ισχύει για ν=κ , έχω $\kappa=\kappa+1 \Rightarrow \kappa+1=\kappa+1+1 \Rightarrow \kappa+1=\kappa+2$ που είναι η P(κ+1) . Δηλ. $P(\kappa)\Rightarrow P(\kappa+1)$ και τότε κάθε αριθμός είναι ίσος με τον επόμενό του και άρα όλοι οι φυσικοί είναι ….ίσοι! Σε αυτό το άτοπο καταλήξαμε διότι δεν ελέγξαμε την πρόταση για ν=1 που δίνει το άτοπο 1=2.

Στον Απειροστικό Λογισμό έχουν διδακτικό ενδιαφέρον τέτοια προβλήματα , όπου κάποια χαρακτηριστικά, αναφέρουμε σε όλα τα κεφάλαια του Απειροστικού λογισμού στο Β΄μέρος.

iv. Να αποδειχθεί ότι η πρόταση « $\forall x \in A \quad P(x)$ **»είναι ψευδής.**

Εδώ , ευθέως καλούμεθα να ανακαλύψουμε αντιπαράδειγμα , αφού έχομε ένα πρόβλημα κλειστής διατύπωσης , και ανοικτής απάντησης , υπό την έννοια , ότι το αντιπαράδειγμα που καλούμεθα να παραθέσουμε, συνήθως δεν είναι μοναδικό . Για παράδειγμα όταν έχω την διατύπωση: *Να αποδειχθεί ότι η πρόταση «Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη» είναι ψευδής* έχει ως σύνηθες και τετριμμένο πλέον ειδικό αντιπαράδειγμα την f(x)=|x| /R , αλλά μπορεί να αντιπαρατεθεί και το ημιγενικό f(x)=|x-α| /R

3.4. Η θέση του αντιπαραδείγματος στην μαθηματική αποδεικτική διαδικασία

Στα μαθηματικά βασικές μέθοδοι απόδειξης είναι η **ευθεία απόδειξη** και η **αντιθετοαντιστροφή** , με κάποιες παραλλαγές πάνω στις δύο αυτές μεθόδους. Έτσι έχουμε την :

Ευθεία απόδειξη: Αρχίζουμε από μια πρόταση P , και μέσω μιας αλυσίδας συλλογισμών της μορφής «εάν….τότε…» καταλήγουμε στην πρόταση Q . Τότε λέμε ότι P $\Rightarrow$ Q

Απόδειξη με χρήση της αντιθετοαντιστροφής : Εκμεταλλευόμαστε το ότι η πρόταση $P \Rightarrow Q$ ισοδυναμεί με $\neg Q \Rightarrow \neg P$ Δηλ. (λεκτικά) αντί να δείξουμε ότι P συνεπάγεται Q , αποδεικνύουμε ισοδυνάμως ότι η άρνηση της Q συνεπάγεται την άρνηση της P . Το έτυμον της ονομασίας της (αντίθετη αντιστροφή) περιγράφει πλήρως και την ουσία της αφού όποιος δικαιολογήσει μια φορά την ονομασία της, δεν ξεχνά ποτέ και την σημασία της.

Απαγωγή εις άτοπον : Θέλοντας να δείξουμε ότι P $\Rightarrow$Q , υποθέτουμε ότι η P δεν συνεπάγεται την Q και καταλήγουμε με λογικές διαδικασίες σε κάτι που δεν στέκει (άτοπο=: το μη έχον τόπο) Σε άτοπο καταλήξαμε διότι δεχθήκαμε

την μη αλήθεια της συνεπαγωγής, οπότε με βάση την αρχή της του μέσου ή τρίτου αποκλίσεως, πρέπει να δεχθούμε υποχρεωτικά την ισχύ της συνεπαγωγής $P \Rightarrow Q$.

Απόδειξη με μαθηματική (ή τέλεια) επαγωγή : Η γνωστή ειδική αποδεικτική μέθοδος για προτάσεις που αφορούν φυσικούς αριθμούς.

Διάψευση με αντιπαράδειγμα : Για να διαψεύσουμε τον ισχυρισμό μιας πρότασης, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα που να ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης, αλλά όχι το συμπέρασμά της

Από τα προηγούμενα μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα για την σημαντική θέση του αντιπαραδείγματος στην αποδεικτική διαδικασία γενικώς .

4. Η Παιδαγωγική του Αντιπαραδείγματος.

4.1. Η κλάση των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων

Κατά την διδασκαλία εισαγωγής μιας έννοιας ε , διατυπώνουμε τον ορισμό της . Καλούμε ως K_ε το (ιδεατό) πεδίο κατανόησης της έννοιας ε . Αυτό το πεδίο, ορίζει παραδείγματα [Π] που πληρούν τον ορισμό ε και μη παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα [Α] που δεν πληρούν τον ορισμό ε . Μπορούμε να γράψουμε, ότι το πεδίο πάνω στο οποίο υλοποιείται η κατανόηση της έννοιας είναι :

$K_\varepsilon=[\Pi]\bigcup [A]$. Προφανώς $[\Pi]\bigcap [A] \neq \varnothing$, άλλως θα είχαμε λογική αντίφαση αφού θα υπήρχε κάποιο παράδειγμα που θα πληρούσε και δεν θα πληρούσε τον ορισμό.

Έχομε δηλαδή διαμέριση του πεδίου κατανόησης της έννοιας K_ε σε δύο (ξένες) κλάσεις ισοδυναμίας, των παραδειγμάτων και των αντιπαραδειγμάτων. Στην [Α] ανήκουν όλα τα παραδείγματα που δεν πληρούν τον ορισμό και στο [Π] όλα τα παραδείγματα που δεν τον πληρούν.

Στα ίδια συμπεράσματα μπορούμε να καταλήξουμε κι αν θεωρήσουμε αντί του ορισμού της έννοιας ε , ένα οποιοδήποτε θεώρημα θ , όπου και εκεί έχομε πεδίο κατανόησης K_θ και αντίστοιχες κλάσεις Παραδειγμάτων [Π] και Αντιπαραδειγμάτων [Α].

Το ενδιαφέρον παιδαγωγικά σημείο είναι ότι συνήθως για να εμπεδώσουμε μια καινούργια έννοια, χρησιμοποιούμε παραδείγματα , παραβλέποντας την χρησιμότητα των αντιπαραδειγμάτων. Ουσιαστικά παραβλέπεται μια κλάση που ανήκει στο πεδίο κατανόησης της έννοιας και η οποία είναι εξ ίσου σημαντική με την κλάση των παραδειγμάτων. Χάνουμε κατ΄ ουσίαν το ήμισυ της προς εμπέδωσιν έννοιας. Για παράδειγμα: Με το να δίνουμε παραδείγματα μόνο συγκλινουσών ακολουθιών , δεν κατανοούμε την έννοια της σύγκλισης. Πρέπει παράλληλα να δίνουμε και αντιπαραδείγματα (ή μη παραδείγματα) συγκλινουσών. Αλλά και τα παραδείγματα , δεν είναι όλα ισοδύναμης διδακτικής αξίας . Η κλάση [Π] συνήθως αποτελείται από υποκλάσεις $[\Pi_1]$, $[\Pi_2]$, $[\Pi_3]$, …,$[\Pi_\nu]$ **αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων** όπως και η κλάση [Α] αποτελείται από υποκλάσεις $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$,…, $[A_\kappa]$ **αντιπροσωπευτικών αντιπαραδειγμάτων**.

Για τα παραδείγματα ισχύουν:

$$[\Pi_1]\cup[\Pi_2]\cup[\Pi_3]\cup...\cup[\Pi_\nu]=[\Pi]$$

$$[\Pi_i]\cap[\Pi_j]=\varnothing \quad \forall i\neq j \quad \mu\varepsilon \;\; i,j\in\{1,2,3,4,....\nu\}$$

Για τα αντιπαραδείγματα ισχύουν ανάλογες σχέσεις αν θέσουμε όπου Π, το Α.

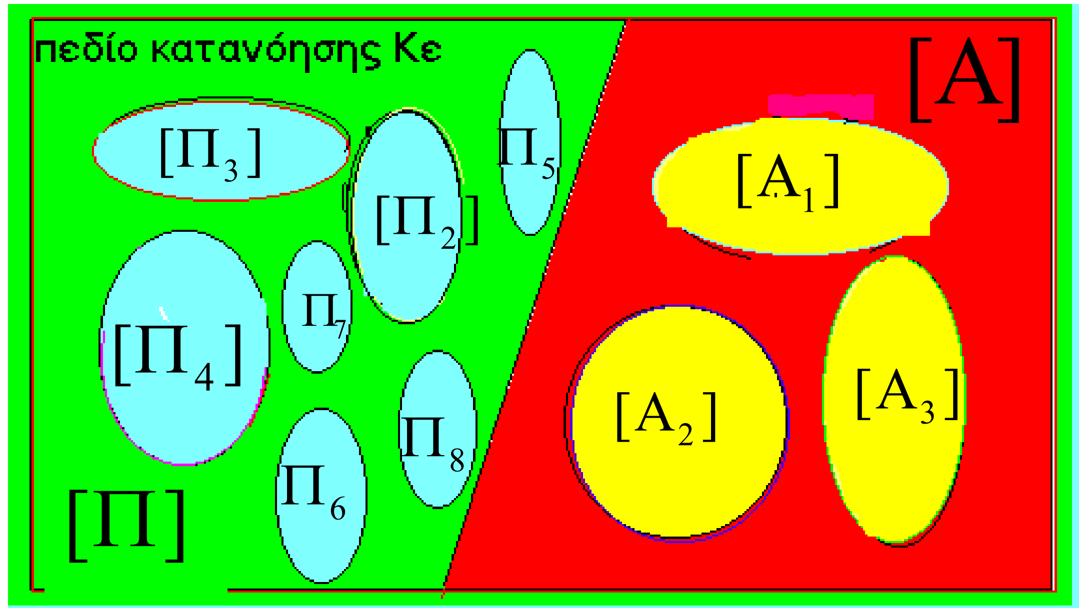
Ένα παράδειγμα ανήκει ή όχι σε μια συγκεκριμένη κλάση αντιπροσωπευτικού παραδείγματος, αν πληροί ή όχι **μια ιδιότητα** την οποία μπορούμε να καθορίσουμε **εκ των προτέρων εμείς** και η οποία να έχει ένα κάποιο **διδακτικό νόημα**. Η ιδιότητα που θα θέσουμε θα έχει μόνο διδακτικό νόημα και άρα θα πρέπει να έχει νόημα ανθρωποκεντρικό, μαθητοκεντρικό, που να έχει σχέση με ψυχολογικά ή επιστημολογικά ή διδακτικά εμπόδια και θα λαμβάνει υπ΄ όψιν του πορίσματα της ψυχολογίας της μάθησης , της γνωσιακής επιστήμης , είτε της ψυχολογίας των μαθηματικών. Με αυτά που γράφουμε , ίσως να κομίζουμε γλαύκαν ες Αθήνας, αλλά θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα

μαθηματικά αντικείμενα όπως τα παραδείγματα, μπορεί να υπάρχουν σύμφωνα με την Πλατωνική αντίληψη ανεξάρτητα από εμάς στον χώρο των ιδεών , αλλά θα πρέπει να προσεγγιστούν από ανθρώπους συγκεκριμένων ηλικιών, εμπειριών ,νοοτροπίας ,πολιτισμικού επιπέδου, με δεδομένα μέσα και σε δοθέντα χρόνο, πράγμα που μας επιβάλλει να είμαστε σαφείς ,περιεκτικοί και να επιτυγχάνουμε βέλτιστο αποτέλεσμα ,σε ελάχιστο χρόνο.

Να δούμε με ένα παράδειγμα , πώς αυτό το **λεπτομερέστερο υπόδειγμα** (μοντέλο) εφαρμόζεται σε ένα διδακτικό πρόβλημα του Απειροστικού Λογισμού και συγκεκριμένα στην εισαγωγή της σύγκλισης ακολουθίας σε πραγματικό αριθμό α .

Η ιδιότητα ταξινόμησης που θα θέσουμε είναι η «πώς κι από πού προσεγγίζουν οι όροι μιας συγκλίνουσας ακολουθίας το όριο α» Το κριτήριο αυτό δεν τίθεται αυθαίρετα, αλλά θέλει να υπογραμμίσει ένα σύνηθες λάθος – παρανόηση που έχουν οι μαθητές από την εξωμαθηματική έννοια «πλησιάζω κάπου» Στην καθημερινή μας ζωή πλησιάζουμε κάτι από μία κατεύθυνση . Αν είμαστε πάνω σε μια ευθεία όπως εν προκειμένω, πλησιάζουμε ή από αριστερά ή από δεξιά μόνο. Το να εκτελώ φθίνουσα ταλάντωση εκατέρωθεν του α δεν είναι ένας συνήθης τρόπος προσέγγισης ενός αντικειμένου στον φυσικό κόσμο. Επίσης το να ακινητοποιούμαι πάνω σε ένα σημείο δεν θεωρείται ότι είναι «τρόπος προσέγγισης» αλλά ότι έχω φθάσει κάπου. Ακόμα περισσότερο να φθάνω στο ζητούμενο σημείο , να οπισθοχωρώ , να το πλησιάζω περισσότερο να φθάνω , να οπισθοχωρώ κ.ο.κ. Στα μαθηματικά μέσω της αφαίρεσης έχουν νόημα και τέτοιες «προσεγγίσεις» αφού αυτό νοηματοδοτεί ο ορισμός της σύγκλισης. Μην ξεχνάμε ότι και η λέξη «προσέγγιση» είναι εξωμαθηματική . Λ.χ. το παράδειγμα της σταθερής ακολουθίας $\{\alpha_\nu\}$ με $\alpha_\nu=3$ που συγκλίνει στο 3 , δεν πρέπει να το βλέπουμε ως ένα τετριμμένο παράδειγμα σύγκλισης, αλλά μάλλον ως ένα σοβαρό αντιπαράδειγμα στην κατεστημένη αντίληψη ότι «συγκλίνουσα ακολουθία στο α είναι μια ακολουθία της οποίας οι όροι πλησιάζουν χωρίς ποτέ να φθάνουν το όριο». Το να κάνει κανείς «σημειωτόν» πάνω στο όριο χωρίς να βαδίζει έστω και ελάχιστα δεν θεωρείται ότι είναι τρόπος πλησιάσματος με μια εξωμαθηματική έννοια. Μην ξεχνάμε, ότι ο πρώτος σοβαρός αριθμητικός ορισμός της σύγκλισης που δόθηκε από τον Cauchy έλεγε: «Όταν οι διαδοχικές τιμές που παίρνει μια μεταβλητή πλησιάζουν συνεχώς σε μια σταθερή τιμή , έτσι ώστε στο τέλος να διαφέρουν

από αυτήν κατά μία ποσότητα όσο θέλουμε μικρή, τότε η σταθερή αυτή ποσότητα ονομάζεται όριο των άλλων ποσοτήτων.» Στην διατύπωση αυτή δεν εμπεριέχονται σαφώς οι τελικά σταθερές ακολουθίες που συγκλίνουν. Η έκφραση «όσο θέλουμε μικρή» δεν εμπεριέχει το «δεν διαφέρουν καθόλου» ενώ στον σύγχρονο «ε, δ» ορισμό, εμπεριέχεται μεν, όχι όμως σαφώς για τον πρωτοείσακτο μαθητή σε αυτή την έννοια. Γι αυτό και θα πρέπει να γίνεται διευκρίνιση , με ένα παράδειγμα τελικά σταθερής ακολουθίας.



Έτσι έχουμε τα εξής:

Συγκλίνουσες Ακολουθίες πραγματικών αριθμών στον $\alpha \in \mathbb{R}$				
Κλάση	**Πλήθος όρων <α**	**Πλήθος όρων=α**	**Πλήθος όρων>α**	**Εκπλήρωση ασθενέστερης συνθήκης από την** $\|\alpha_\nu - \alpha\| < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_1]	πεπ/νο	πεπ/νο	πεπ/νο	Δεν τις εξετάζει ο Απειροστικός Λογισμός
[Π_2]	∞	πεπ/νο	πεπ/νο	$0 < \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_3]	πεπ/νο	∞	πεπ/νο	$0 = \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_4]	πεπ/νο	πεπ/νο	∞	$0 < \alpha_\nu - \alpha < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_5]	∞	∞	πεπ/νο	$0 \leq \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_6]	∞	πεπ/νο	∞	$0 < \|\alpha_\nu - \alpha\| < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_7]	πεπ/νο	∞	∞	$0 \leq \alpha_\nu - \alpha < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[Π_8]	∞	∞	∞	$\|\alpha_\nu - \alpha\| < \varepsilon ,\ \forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$

Ο αναγνώστης, μπορεί να δει ότι οι κλάσεις [$Π_2$] – [$Π_8$] καλύπτουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις παραδειγμάτων σύγκλισης στο $α\in\mathbb{R}$ και ότι εξ ορισμού , είναι ξένες ανά δύο.

Στον αντίποδα έχουμε τις κλάσεις αντιπροσωπευτικών αντιπαραδειγμάτων που είναι:

ΜΗ Συγκλίνουσες Ακολουθίες πραγματικών αριθμών.		
Κλάση		**Πλήθος οριακών αριθμών**
[$Α_1$]	[$Α^1{}_1$]	Πεπερασμένο ≥ 2 και όλοι πραγματικοί
	[$Α^2{}_1$]	Άπειρο και όλοι πραγματικοί
[$Α_2$]		Μοναδικός το $+\infty$
[$Α_3$]		Μοναδικός, το $-\infty$
[$Α_4$]		Τουλάχιστον δύο , με ένα το $+\infty$ είτε το $-\infty$

Στην παραπάνω κατηγοριοποίηση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων , μπορούν να προστεθούν και οι πάγιες κατηγορίες του ειδικού , ημιγενικού ή γενικού παραδείγματος σύγκλισης (Ως γενικό παράδειγμα συγκλίνουσας εδώ θεωρείται πάσα ακολουθία που ακολουθεί τον γνωστό ορισμό της σύγκλισης.)

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι κλάσεις που θεωρούμε είναι αντικειμενικές, στον βαθμό που υποδηλώνουν σχέσεις εγκλεισμού σε έννοιες επί των οποίων υποτίθεται ότι έχει συμφωνήσει ολόκληρη η μαθηματική κοινότητα[7] , αλλά εξαρτώνται και από τα κριτήρια που απαιτούμε (υποκειμενικά) να εκπληρούν. Θα μπορούσαμε λ.χ. να βάλουμε στην κατάταξη και την έννοια «φραγμένη ακολουθία» Όμως, σε κάθε περίπτωση ένας συγγραφέας διδακτικού εγχειριδίου Απειροστικού Λογισμού, οφείλει:

- Να γνωρίζει τις δυνατές κλάσεις χαρακτηριστικών παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων της έννοιας που θέλει να εισάγει , αναφορικά με τα γνωστά γνωστικά , διδακτικά και επιστημολογικά εμπόδια .

[7] Στην βιβλιογραφία των μαθηματικών μπορούμε να συναντήσουμε διάφορους **μη ισοδύναμους** ορισμούς για κάποιες έννοιες , απ΄ όπου πηγάζουν και αρκετές παρανοήσεις και λάθη. Εκτεταμένα στην παρούσα εργασία έχουμε σχολιάσει τους πολυσήμαντους ορισμούς της έννοιας «σημείο καμπής»

- Να παραθέσει κατάλληλα διδακτικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα από **όλες τις κλάσεις ,** ώστε να καλύψει νοηματοδοτικά πλήρως , την πρωτοείσακτη έννοια.

Ως πρακτική εφαρμογή, το ανωτέρω περιγραφέν πρότυπο, θα μπορούσε να έχει στην αξιολόγηση των υπό κρίσιν διδακτικών εγχειριδίων των μαθηματικών τουλάχιστον από άποψης πληρότητας παρουσιάσεως των εννοιών. Προς τούτο απαιτείται η εκ των προτέρων σύνταξη ενός καταλόγου των εννοιών που περιέχονται σε ένα εγχειρίδιο και των κλάσεων παραδειγμάτων που πρέπει να περιέχει κάθε έννοια με την αναγκαία διδακτική τεκμηρίωση. Επίσης των κλάσεων των αντιπαραδειγμάτων της . Το τι είδους βαρύτητα θα επιδείξει σε κάθε παράδειγμα κάθε κλάσης ένας συγγραφέας και πώς θα το προσεγγίσει είναι εν πολλοίς δικό του θέμα και ενέχον αρκετό βαθμό υποκειμενικότητας. Η ύπαρξη όμως όλων των κλάσεων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων μιας έννοιας είναι αντικειμενική και δύναται να είναι βασικός κανόνας αξιολόγησης ενός διδακτικού εγχειριδίου. Ένας διδάσκων κατόπιν , είναι εύκολο να καλύψει πλήρως την έννοια αρκεί να γνωρίζει το μοντέλο μας ή να ακολουθεί ένα βιβλίο που το έχει λάβει υπ ΄όψιν του.

Για την περίπτωση λ.χ. της έννοιας της σύγκλισης ακολουθίας μπορούμε να κατασκευάσουμε τα παρακάτω :

Παραδείγματα συγκλινουσών ακολουθιών λ.χ. στο 0 $\in \mathbb{R}$:

- $\alpha_\nu = -\frac{1}{\nu} \to 0$ Όλοι οι όροι της (τελικά) είναι αριστερά του μηδενός (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_2])])
- $\alpha_\nu = \begin{cases} 1 \,,\ \alpha\nu\ \ \nu \le 10^{100} \\ 0 \,,\ \alpha\nu\ \ \nu > 10^{100} \end{cases}$ Οι όροι της (τελικά) είναι μηδέν. (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_3]
- $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$ Όλοι οι όροι της (τελικά) είναι δεξιά του μηδενός (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_4])

- $\alpha_\nu = \begin{cases} -\dfrac{1}{\nu}, & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa \\ 0, & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa+1 \end{cases}$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_5])

- $\alpha_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{\nu} \to 0$ Οι όροι της (τελικά) είναι εκατέρωθεν του μηδενός (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_6])

- $\alpha_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu}, & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa \\ 0, & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa+1 \end{cases}$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_7])

- $\alpha_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu}, & \alpha\nu\ \nu = 3\kappa \\ 0, & \alpha\nu\ \nu = 3\kappa+1 \\ -\dfrac{1}{\nu}, & \alpha\nu\ \nu = 3\kappa+2 \end{cases}$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [Π_8])

Αντιπαραδείγματα μη συγκλινουσών ακολουθιών στον α $\in \mathbb{R}$

- $\alpha_n = 1 + (-1)^n$ έχει δύο οριακούς αριθμούς, το 0 και το 2 (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_1] υποκλάση [$A^1{}_1$])
- $\alpha_\nu = \nu \to +\infty$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_2])
- $\alpha_\nu = -\nu \to -\infty$ (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_3])
- $\alpha_n = \begin{cases} n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ έχει δύο οριακούς αριθμούς , το 0 και το $+\infty$

  (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_4])
- $\alpha_n = \begin{cases} p - \dfrac{1}{p^\kappa}, & \text{αν } n = p^\kappa, p = \text{πρώτος} \\ 0, & \text{αν } n \neq p^\kappa, p = \text{πρώτος} \end{cases}$ έχει ως άπειρους οριακούς αριθμούς κάθε πρώτο και το 0 . (Οι πρώτοι είναι άπειροι στο πλήθος από σχετική πρόταση του Ευκλείδη , ενώ $p^k \neq q^\lambda$ για p, q ,πρώτους , και κ, λ φυσικούς , λόγω του μοναδικού αναπτύγματος ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων.) (Αντιπρόσωπος της κλάσης [A_1] υποκλάση [$A^2{}_1$])

Εν κατακλείδι, μπορούμε να συνοψίσουμε τα εξής:

Όταν ο διδάσκων εισάγει μια έννοια , πρέπει να γνωρίζει τις συνήθεις παρανοήσεις και τα συνήθη λάθη των μαθητών. Ένα σημαντικό μέρος από αυτά τα λάθη προέρχονται από λανθασμένες νοηματικές αναπαραστάσεις που προκαλούνται εν τω γεννάσθαι και εν τω γίγνεσθαι της οικοδόμησης μιας νέας έννοιας , από λανθασμένα μοντέλα, τα οποία με την σειρά τους προκαλούνται και από ελλιπή **(:=όχι όλων των υποκλάσεων**)παραδείγματα και αντιπαραδείγματα.

Θεωρητικά μπορεί ένας μαθητής να γνωρίζει άπειρα παραδείγματα, αλλά επειδή αυτά μπορεί να μην είναι **αντιπροσωπευτικά** όλων των κλάσεων να μην κατανοεί την έννοια της σύγκλισης. Γιατί άραγε ο ορισμός της συγκλίνουσας ακολουθίας περιλαμβάνει την απαίτηση η διαφορά $α_ν$-α να είναι μέσα σε απόλυτη τιμή; Αυτό καθίσταται φανερό μόνο αν έχουμε τουλάχιστον ένα παράδειγμα από την κλάση [$Π_8$] **Μόνο ένας αντιπρόσωπος της κλάσης [$Π_8$] μπορεί να δικαιολογήσει <u>πλήρως</u> τον ορισμό της σύγκλισης, ενώ το σύνολο όλων των προηγούμενων κλάσεων δικαιολογούν μόνο μια ασθενέστερη συνθήκη σύγκλισης**. .(βλ. πρόλογο αυτόθι) Κατόπιν αυτού εισάγεται η γεωμετρική ερμηνεία του ορισμού και μόνο τότε η νοητική εικόνα που θα σχηματίσει ο μαθητής μπορεί να είναι πλήρης και άρα ακριβής Οι παλαιότεροι μαθηματικοί θα ενθυμούνται ότι τα πολύ παλιά εγχειρίδια του Γυμνασίου (Σημερινού Λυκείου) δεν είχαν ούτε έναν αντιπρόσωπο από την κλάση [$Π_8$] , ίσως και από την κλάση [$Π_3$] .Με τα σημερινά διδακτικά βιβλία δεν μπορεί να γίνει σύγκριση, μιας και η έννοια δεν διδάσκεται συστηματικά, κάτι που όμως μπορεί να γίνει στο εγγύς μέλλον . Μπορεί όμως να εισαχθούν δραστηριότητες που ήδη μπορεί να υπάρχουν με άλλη μορφή. Λόγου χάριν αντί της συνήθους προσέγγισης του εμβαδού του κύκλου με πολύγωνα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα (ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες) θα μπορούσε να γίνεται μια απλή θεώρηση- αναφορά , στην ακολουθία που δημιουργείται με τα πολύγωνα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα εναλλάξ στον κύκλο.

Στο ολοκλήρωμα Riemann (ή και στο απλούστερο Cauchy) πάλι έχομε δύο ακολουθίες προσεγγίσεων του ανωτέρου και του κατωτέρου αθροίσματος .

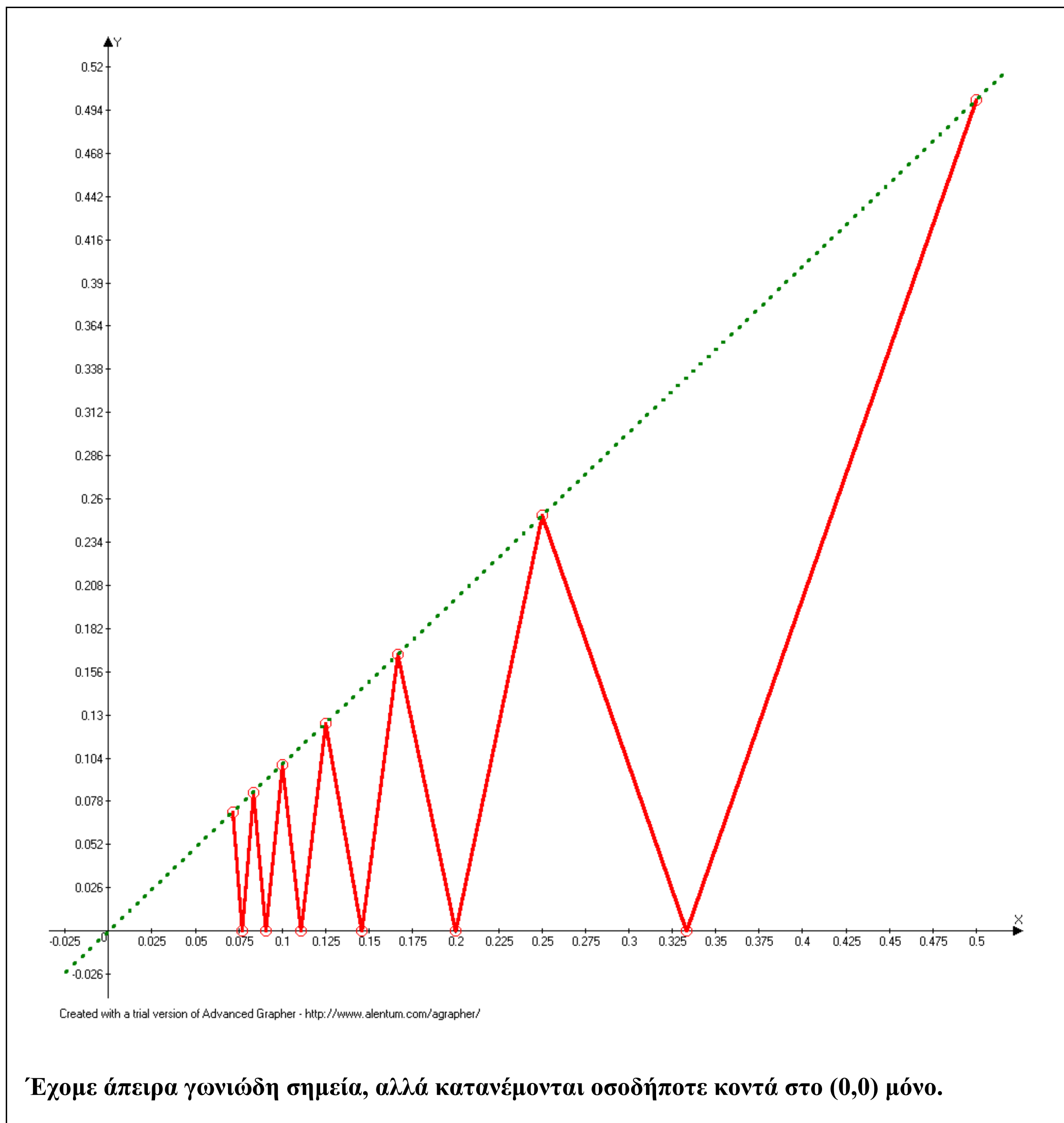
Δηλαδή οι γεωμετρικές θεωρήσεις και εποπτείες που αποκομίζει στην πείρα του ένας σπουδαστής (έστω κι αν προηγούνται της έννοιας «σύγκλιση ακολουθίας») είναι ισχυρές υπέρ της μονόπλευρης σύγκλισης από δύο ακολουθίες και γι αυτό πρέπει να υπάρχουν και τα διδακτικά αντιπαραδείγματα για να μην θεωρηθεί ότι δεν προσεγγίζεται κάποιο όριο και αμφίπλευρα από μία ακολουθία.

4.2. Η κατασκευή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων.

Η κατασκευή ενός παραδείγματος που να πληροί κάποιες συνθήκες , είναι μια πράξη της οποίας η δυσκολία κυμαίνεται από εξαιρετικά εύκολη, έως εξαιρετικά δύσκολη . Για παράδειγμα , με μια πολυωνυμική έκφραση , ο κάθε ένας μπορεί να κατασκευάσει παράδειγμα συνεχούς συναρτήσεως, ενώ παράδειγμα συνεχούς συναρτήσεως και πουθενά παραγωγίσιμης κατασκεύασε κατά πρώτον μόνο η μαθηματική ιδιοφυΐα του Weierstrass . Επίσης είναι γεγονός , ότι δεν υπάρχει πάντα κάποιος αλγόριθμος κατασκευής ενός παραδείγματος , αφού το ερώτημα για την ύπαρξή του συνήθως είναι ανοικτό και δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων την ύπαρξή του. Η κατασκευή γίνεται με πειραματισμό πράγμα που συνεπάγεται μεγάλη κατανάλωση χρόνου. Ο πειραματισμός όμως αναπτύσσει μια διαίσθηση του τι είναι αυτό που ακυρώνει την εφαρμογή ενός ορισμού ή που διαψεύδει μια πρόταση.

Για παράδειγμα η κατασκευή μιας συνεχούς και μη παραγωγίσιμης συναρτήσεως σε κάποιο σημείο , προϋποθέτει την ύπαρξη γωνίας[8] σε αυτό. Για να κατασκευασθεί μια παντού συνεχής και μη παραγωγίσιμη συνάρτηση , θα πρέπει να έχει άπειρα στο πλήθος γωνιώδη σημεία. Αυτό όμως δεν φθάνει, αφού μπορεί να έχουμε μια συνάρτηση με το παρακάτω διάγραμμα που δεν ικανοποιεί την απαίτησή μας.

[8] Η έννοια «γωνία» μπορεί να εννοείται με την ευρεία αρχαιοελληνική μαθηματική σημασία όπου εκτός από τις γνωστές ευθύγραμμες γωνίες έχουμε και τις καμπυλόγραμμες ή μεικτόγραμμες γωνίες.

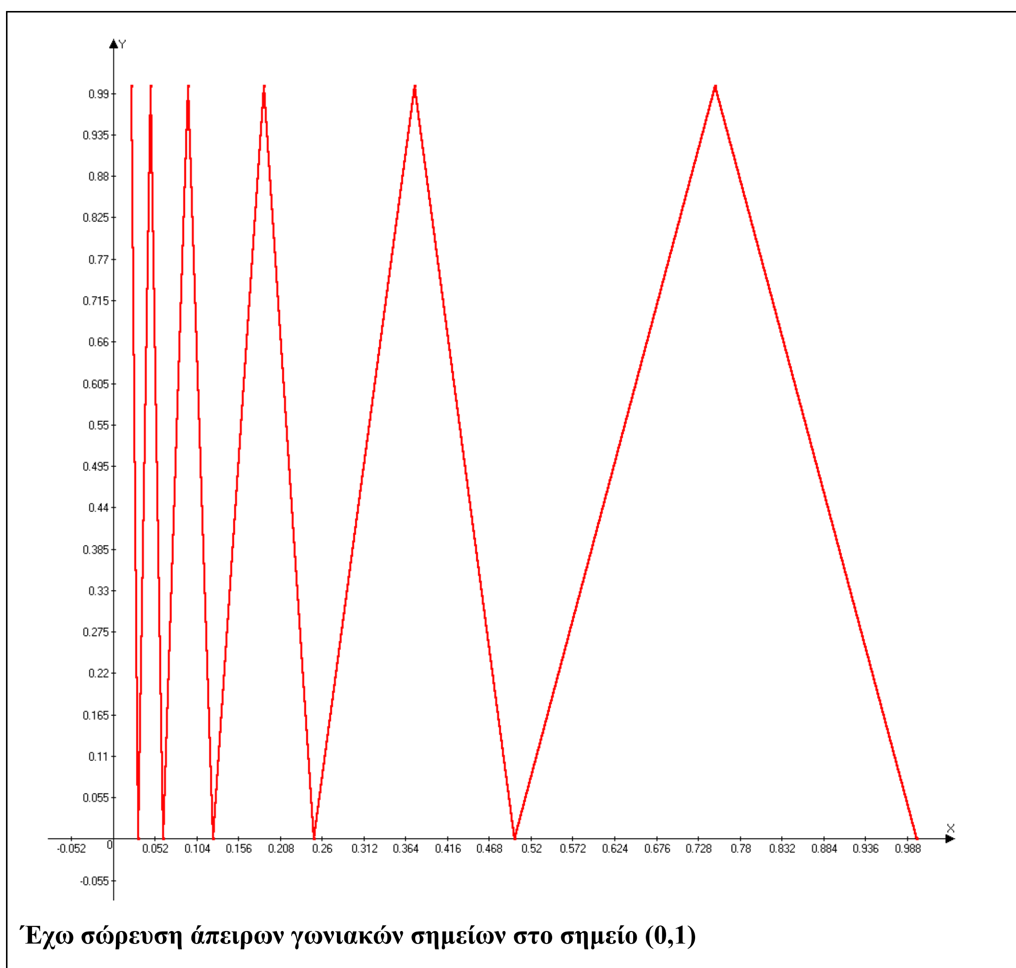


Έχομε άπειρα γωνιώδη σημεία, αλλά κατανέμονται οσοδήποτε κοντά στο (0,0) μόνο.

Θα μπορούσαμε να έχουμε και πάλι άπειρα γωνιώδη σημεία κατανεμημένα απείρως κοντά στο (0,1) , όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα.

Η ιδέα του Weierstrass έγκειτο στο να πάρει ένα απλό γράφημα με ένα γωνιώδες σημείο στην μέση του διαστήματος ορισμού. Έπειτα χώρισε το διάστημα σε ν ζυγά ίσα τμήματα και προσέθεσε ν στο πλήθος νέα γωνιώδη σημεία . Αυτό επιτυγχάνεται με το να προσθέσω μια νέα συνάρτηση στην αρχική που να έχει ν «δοντάκια» . Στη συνέχεια, κάθε ένα από τα ν ίσα κομματάκια , τα χώρισε πάλι σε ν ίσα και προσέθεσε μια τρίτη συνάρτηση με $ν^2$ νέα «δοντάκια» Φαίνεται εύλογο ότι πρέπει να προσθέσω άπειρες τέτοιες συναρτήσεις . Αλλά όμως το αποτέλεσμα των άπειρων προσθέσεων θα πρέπει να έχει νόημα συνάρτησης , δηλαδή να συγκλίνει η σειρά και άρα αυτό μπορεί

να επιτευχθεί μόνο αν προσθέτω συναρτήσεις διαρκώς μικροτέρου ύψους (μεγίστου) και μάλιστα κατάλληλης μείωσης ώστε το άθροισμα όλων των μεγίστων να είναι πεπερασμένος αριθμός. Αυτά ακριβώς υλοποίησε ο Weierstrass και πέτυχε μια θαυμαστή συνάρτηση που θα δούμε παρακάτω λεπτομερώς και θα αποδείξουμε τις ιδιότητές της.



Έχω σώρευση άπειρων γωνιακών σημείων στο σημείο (0,1)

Τα προηγούμενα ισχύουν κυρίως στην μαθηματική έρευνα. Στα πλαίσια της διδακτικής των μαθηματικών όμως τα πράγματα είναι απλούστερα, αφού ο διδάσκων καλείται να παραθέσει γνωστά παραδείγματα και αντιπαραδείγματα εφαρμόζοντας υπάρχοντες απλούς αλγορίθμους κατασκευής τους. Για παράδειγμα μπορούμε να κατασκευάσουμε παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων αθροίζοντας συνεχείς συναρτήσεις, ή πολλαπλασιάζοντάς τες ή σχηματίζοντας την σύνθεσή τους. Μπορούμε να κατασκευάσουμε φραγμένη ακολουθία εκμεταλλευόμενοι ότι κάθε συγκλίνουσα είναι φραγμένη κ.ο.κ. Εδώ η θεωρία υποστηρίζει την κατασκευή των παραδειγμάτων, την οποία ο διδάσκων γνωρίζει πριν τον διδασκόμενο και μπορεί να τα ανασύρει

καταλλήλως. Στο τέλος εκάστου κεφαλαίου παραθέτουμε κάποιους στοιχειώδεις κανόνες κατασκευής βασικών παραδειγμάτων για την περίπτωση του Απειροστικού Λογισμού.

Η κατασκευή ειδικών αντιπαραδειγμάτων σε ορισμό έγκειται στο να πάρουμε ένα παράδειγμα και να το αλλοιώσουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνει αντιπαράδειγμα. Λ.χ. , αν πάρουμε την συνάρτηση f(x)= x^2 $/\mathbb{R}$ δεν είναι μονότονη αλλά η ίδια αναλυτική έκφραση ορισμένη στο $[0,+\infty)$ δίνει γνησίως αύξουσα συνάρτηση , η ίδια έκφραση στο $(-\infty,0]$ δίνει γνησίως φθίνουσα , μεταβολή του εκθέτη σε περιττό δίνει γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η αρνητική προσήμανση αντιστρέφει τα διαστήματα μονοτονίας, η πρόσθεση θετικής σταθεράς καθιστά την εξίσωση f(x)=0 αδύνατη, ενώ η πρόσθεση αρνητικής σταθεράς δίνει δύο διαφορετικές ρίζες για την ίδια εξίσωση , η αλλαγή του πεδίου ορισμού σε $\mathbb{N}$ την καθιστά ακολουθία που είναι συνεχής σε κάθε σημείο της , αλλά πουθενά παραγωγίσιμη κ.ά.

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε, ότι υπάρχουν κάποια εντελώς χαρακτηριστικά παραδείγματα τα οποία επειδή εκφεύγουν των συνήθων πλαισίων της εποπτείας και διαίσθησης, αλλά παράλληλα έχουν πολλές διδακτικές εφαρμογές στον απειροστικό λογισμό. Το ευχάριστο γεγονός είναι ότι είναι ελάχιστα στο πλήθος , πράγμα που καθιστά αναγκαία την κτήση τους από σπουδαστές και διδάσκοντες. Παραθέτουμε κατά βάσιν δύο μόνο, τα οποία όμως έχουν εξαιρετικό ενδιαφέρον.

<u>Στις ακολουθίες-σειρές :</u>

η $\alpha_\nu=(-1)^\nu$, είναι το «διδακτικό πασπαρτού» που ανοίγει πολλά συνήθη ερωτήματα που δημιουργούνται κατά την διδασκαλία του κεφαλαίου των ακολουθιών-σειρών:

- Δεν είναι συγκλίνουσα.
- Είναι φραγμένη, αλλά δεν είναι συγκλίνουσα
- Έχει οριακό αριθμό το 1 , αλλά δεν συγκλίνει σε αυτόν
- Σε κάθε περιοχή του 1 , έχω άπειρο πλήθος όρων της, αλλά το 1 δεν είναι όριό της.
- Δεν συγκλίνει, αλλά η $|\alpha_\nu|$ συγκλίνει στο 1 .
- Δεν συγκλίνει, αλλά η $(\alpha_\nu)^2$ συγκλίνει στο 1 .

- Δεν συγκλίνει, αλλά η $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = -1 \to -1$
- Αν θεωρήσω την α_ν και την $\beta_\nu = \alpha_{\nu+1}$, τότε και οι δύο δεν συγκλίνουν, αλλά η $\alpha_\nu + \beta_\nu = 0 \to 0$
- Οι α_ν και β_ν δεν συγκλίνουν, όμως $\alpha_\nu \beta_\nu = -1 \to -1$
- Οι α_ν και β_ν δεν συγκλίνουν, όμως $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = -1 \to -1$
- $0\alpha_\nu = 0 \quad \to 0$ ενώ η α_ν δεν συγκλίνει.
- Η α_ν δεν είναι συγκλίνουσα, αλλά έχει δύο συγκλίνουσες υπακολουθίες τις $\alpha_{2\nu} = (-1)^{2\nu} \to 1$ και $\alpha_{2\nu+1} = (-1)^{2\nu+1} \to -1$.
- Η α_ν δεν είναι συγκλίνουσα, αλλά έχει άπειρες υπακολουθίες που συγκλίνουν στο 1 , τις $\alpha_{\kappa\nu} = (-1)^{2\kappa\nu}$ με $\kappa \in \mathbb{N}$ καθώς και άπειρες που συγκλίνουν στο -1 , τις $\alpha_{\kappa\nu} = (-1)^{2\kappa\nu+1}$ $\kappa \in \mathbb{N}$.
- Είναι παράδειγμα μη μονότονης ακολουθίας.
- Η Σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}$ δεν συγκλίνουν, όμως το άθροισμά τους $\sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n+1}] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-1) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0 \to 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ συγκλίνει. Όμως η $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει..
- Η $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ δεν συγκλίνει, διότι η $(-1)^n \not\to 0$ (είναι αποκλίνουσα).

Όμως αν εισάγω παρενθέσεις (κάτι που γενικώς δεν επιτρέπεται στις σειρές) μετατρέπεται σε συγκλίνουσα, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$(*) = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

$= 0$. Δηλαδή φαίνεται να συγκλίνει στο 0. Έτσι εξηγείται το «παράδοξο» , αφού η ισότητα (*) είναι λανθασμένη.

Στις συναρτήσεις , συνέχεια , παραγώγιση και ολοκλήρωση:

Η συνάρτηση του Dirichlet $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ -1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$ είναι επίσης ένα πασπαρτού –διδακτικό παράδειγμα , αφού:

- Είναι ασυνεχής
- Είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
- Οποιοσδήποτε περιορισμός της f σε διάστημα του R είναι επίσης ασυνεχής.
- Ως ασυνεχής δεν παραγωγίζεται σε κανένα σημείο του R .
- Η f είναι ασυνεχής παντού, αλλά η |f| είναι συνεχής παντού.
- Αν $g(x)=-f(x)$ τότε και η g είναι ασυνεχής παντού, αλλά η

  fg(χ)=-1 είναι παντού συνεχής, όπως και η (f-g)(x)=0 είναι παντού συνεχής , όπως και η $\frac{f}{g}(x)=-1$ είναι συνεχής , όπως και η $(f\circ g)(x)=1$, είναι επίσης συνεχής.
- Είναι περιοδική με περίοδο οιοδήποτε θετικό ρητό αριθμό. (Σύμφωνα με άλλο ορισμό της περιοδικής συνάρτησης, δεν είναι περιοδική διότι δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο.)
- Η f^2 είναι συνεχής, ενώ η f είναι ασυνεχής.
- Η $h(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 0 & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$ Δεν εκπληροί τις προϋποθέσεις του

  Θεωρήματος Bolzano «στον μέγιστο δυνατό βαθμό», ενώ εκπληροί το συμπέρασμα «στον μέγιστο δυνατό βαθμό», πράγμα που την καθιστά ιδανικό παράδειγμα για την μη ισχύ του αντιστρόφου του θεωρήματος. (Ικανές, αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες , βλ. Β1.6.5)
- Η f(x) είναι παράδειγμα φραγμένης συνάρτησης.
- Η f(x) Δεν είναι μονότονη συνάρτηση.
- Η f(x) , όχι μόνο δεν είναι μονότονη στο R, αλλά δεν υπάρχει υποδιάστημα του R στο οποίο να είναι μονότονη.
- Η f(x) ορίζεται στο R και έχει διμελές πεδίο τιμών.
- Η f(x) ορίζεται στο R και σε κάθε υποδιάστημα του R οσοδήποτε μικρό, περιέχονται άπειρες θέσεις ακροτάτων της f .

- Η f(x) /[α,β] είναι φραγμένη και δεν είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη, όμως η |f| καθώς και η f^2 είναι Riemann ολοκληρώσιμες.
- Η h(x) / [α,β] , είναι φραγμένη και δεν είναι κατά Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη, είναι όμως κατά Lebesque
- Η f έχει την εξεζητημένη αναλυτική έκφραση
  $f(x) = -1 + 2[\lim_{n\to\infty} \sigma\upsilon\nu^n(n!\pi x)]$
- Αν $g(x) = -f(x)$ τότε και η f και η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμες, αλλά το γινόμενό τους fg(x)=1 , είναι Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Όλα τα παραπάνω καθώς και άλλα σχετικά , τα διαπραγματευόμαστε στο Β΄ μέρος της εργασίας στις οικείες θέσεις των κεφαλαίων.

4.3 Η Κονστρουκτιβική παιδαγωγική αντίληψη και το αντιπαράδειγμα

Σύμφωνα με την νεώτερη θεωρία του Οικοδομισμού (Κονστρουκτιβισμού) , υπάρχουν δύο βασικές αρχές:

1) Η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δεν συλλαμβάνεται παθητικά από το περιβάλλον.
2) Η γνώση είναι μια διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των εμπειριών και όχι μια διαδικασία ανακάλυψης προϋπάρχοντος κόσμου που είναι ανεξάρτητος από τον γνώστη.

Σύμφωνα με τις δύο παραπάνω θεμελιώδεις αρχές, δεν είναι οι επεμβάσεις των ενηλίκων που επιδρούν στην κατασκευή της γνώσης του παιδιού, αλλά οι εμπειρίες του παιδιού από αυτές τις επεμβάσεις, έτσι όπως αυτό τις ερμηνεύει , βασιζόμενο στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις του. Ο ενήλικος, δεν μπορεί να προκαλέσει εμπειρίες στο παιδί δια μέσου των δικών του εμπειριών.

Η κατανόηση λοιπόν μιας μαθηματικής έννοιας χάνει τον απόλυτο χαρακτήρα της και αποκτά μια οιονεί εξατομικευμένη μορφή , η οποία γίνεται αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη. Έχουμε δηλαδή υιοθέτηση

ενεργητικών μεθόδων μάθησης , μέσα από την κατάλληλη σχεδίαση μέσω των οποίων θα δώσει ο δάσκαλος στον μαθητή την δυνατότητα να χτίσει την μάθηση. Αυτό στα μαθηματικά γίνεται με «διαδικασίες λύσης προβλήματος». (Problem Solving) ή Λυτική προβλήματος

Μια τέτοια διαδικασία σημαίνει πειραματισμό, εικασία , δοκιμή ,διαπραγμάτευση στην αίθουσα, ενεργοποίηση ευρετικών και ουσιαστικά μια καθοδηγούμενη επανανακάλυψη της γνώσης , η οποία θα περάσει μέσα από τα τουλάχιστον γνωστά επιστημολογικά εμπόδια , από αναμενόμενα σφάλματα και κατ΄ ουσίαν θα ακολουθήσει το πρότυπο της επιστημονικής ανακάλυψης .

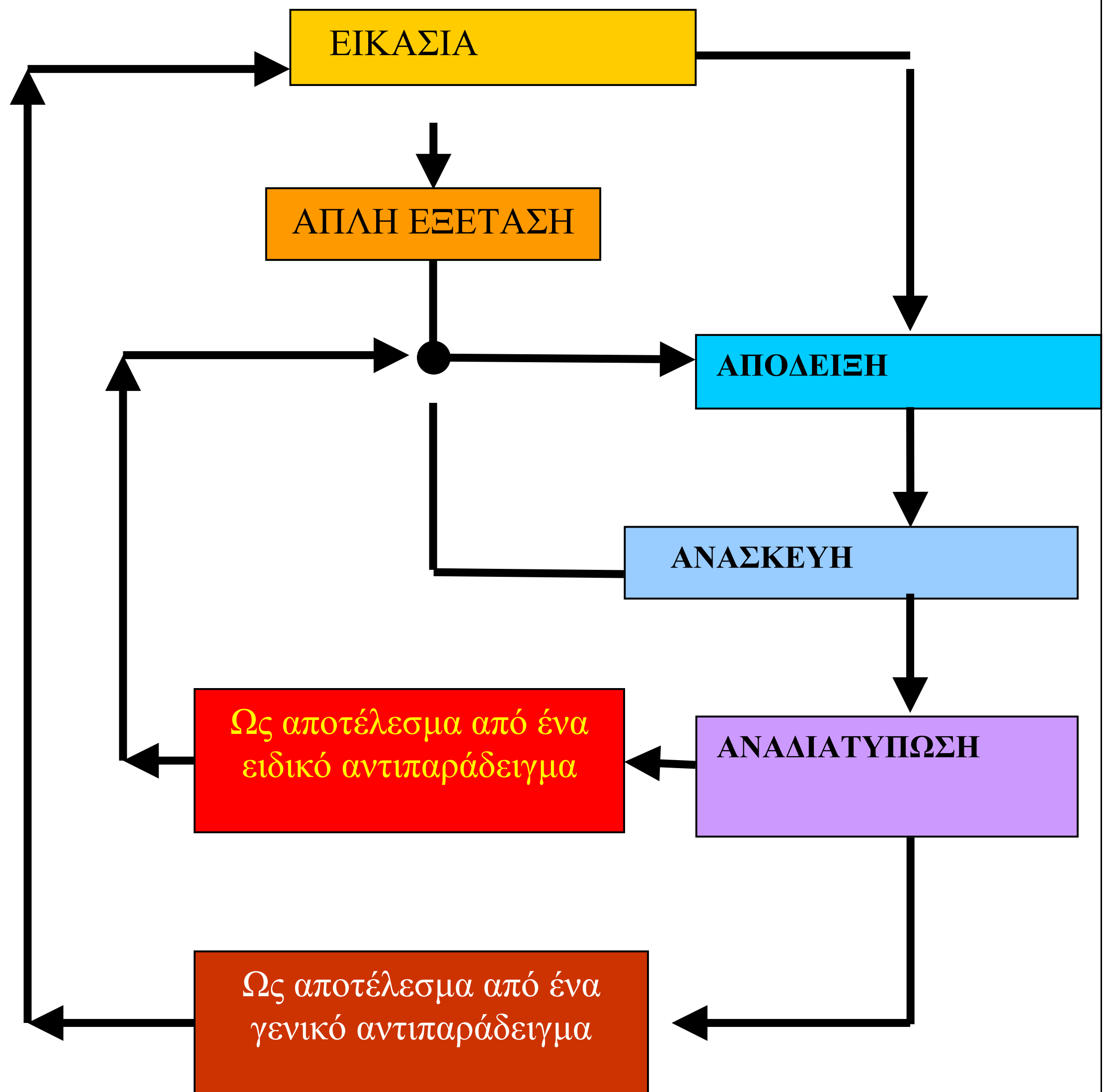
Ένα τέτοιο πρότυπο , είναι του Lakatos στο οποίο το αντιπαράδειγμα έχει δεσπόζουσα θέση . Το συγκεκριμένο πρότυπο του Lakatos περιγράφει την παραγωγή επιστημονικής μαθηματικής γνώσης όπως πράγματι παράγεται και όχι όπως συνήθως παρουσιάζεται.

Πριν λοιπόν παραχθεί το τελικό μαθηματικό θεώρημα ή πρόταση, περνά από ενδιάμεσα στάδια λανθασμένων εικασιών που καταρρίπτονται με αντιπαραδείγματα, γίνεται αναθεώρηση της εικασίας, αναζητούνται νέα αντιπαραδείγματα , βελτιώνονται οι αποδείξεις και τέλος καταλήγουμε στην τελική πρόταση.

Για να τονιστεί η θέση, παρουσιάζομε και την αντίθεση (τον αντίποδα) στα παραπάνω :

Στα διδακτικά εγχειρίδια η διαδικασία της ανακάλυψης δεν αναφέρεται. Αφού η επεξεργασία του θεωρήματος έχει γίνει με οποιοδήποτε τρόπο και οποιοδήποτε μέσο, αποκρύπτεται και αναδιοργανώνεται προσαρμόζεται , συμμορφώνεται λεκτικά και συμβολικά με τους κανόνες της παραγωγικής μεθόδου. Οι δάσκαλοι καμιά φορά θέλοντας να παρουσιασθούν ως μέγιστες διάνοιες μπορεί να ακολουθούν την σύνθεση κρύβοντας την ανάλυση ενός προβλήματος . Αυτό προκαλεί τις γνωστές παρενέργειες αν όχι της μαθηματικοφοβίας, τουλάχιστον της μείωσης του ενδιαφέροντος για το μάθημα.

Αλλά ας δούμε το πρότυπο (μοντέλο) του Lakatos σε απλοποιημένη μορφή:



Σύμφωνα με το παραπάνω πρότυπο, η μαθηματική ανακάλυψη έχει 4 φάσεις:

- Διατύπωση της πρωταρχικής εικασίας.
- Αποδεικτική ανάλυση, κατά την οποία αποσυντίθεται η αρχική εικασία σε υπο-εικασίες και λήμματα.
- Εμφάνιση γενικών αντιπαραδειγμάτων για την αρχική εικασία.
- Επανεξέταση της απόδειξης, όπου συνήθως εμφανίζεται ένα ένοχο λήμμα ως μία ουσιώδης υπόθεση η οποία δεν διατυπώθηκε στην αρχική

εικασία . έτσι, τροποποιείται η αρχική εικασία για να συμπεριλάβει το λήμμα ως υπόθεση κτλ.

Το ερώτημα είναι αν τα παραπάνω μπορούν να μεταφερθούν στην αίθουσα διδασκαλίας. Βεβαίως η απάντηση είναι «Όχι αυτούσια, αλλά κατά διδακτικήν αναλογίαν , μέσω καταστάσεων λυτικής προβλήματος και στα πλαίσια της κοστρουκτιβικής παιδαγωγικής προσέγγισης.»

Επομένως ο διδάσκων θα πρέπει και να έχει εξοικειωθεί με τα αντιπαραδείγματα θεωρώντας τα ως ισότιμα εργαλεία με τα παραδείγματα , και να ενθαρρύνει τους μαθητές του να τα ανακαλύπτουν.

5. Ιστορικά Λάθη-Παράδοξα & Αντιπαραδείγματα του Απειροστικού Λογισμού.

5.1. Η Ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών και ο Βιογενετικός νόμος.

Ο Απειροστικός λογισμός ασχολείται με τον λογισμό των απείρως μικρών (όπως υποδηλώνει και το έτυμον της ονομασίας του) αλλά και τον λογισμό των απείρως μεγάλων. Αρχαιόθεν όμως, είχε καταδειχθεί ότι η διαίσθηση όσον αφορά το άπειρο και τις ιδιότητές του, οδηγεί σε σφάλματα και παρανοήσεις καθώς ο άνθρωπος ως πεπερασμένη οντότητα και αντιλαμβανόμενος ένα μικρό και πεπερασμένο κομμάτι του Σύμπαντος, δυσκολεύεται σε άπειρες και απειροστές έννοιες. Αυτή είναι μια εύλογη και προφανής εξήγηση που είναι κοντά στην ιστορική πραγματικότητα .

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η παιδαγωγική αξιοποίηση των ιστορικών λαθών που διέπραξε ο άνθρωπος στην εξελικτική πορεία του σπουδαίου αυτού κλάδου της Μαθηματικής επιστήμης , αφού φαίνεται να ισχύει ο **βιογενετικός νόμος (ή Γενετική αρχή ή Γενετική ανακεφαλαίωση)** , σύμφωνα με τον οποίον «Η οντογένεση επαναλαμβάνει συντόμως την φυλογένεση» Η κατ΄ αναλογίαν μεταφορά του νόμου αυτού στην διδακτική των μαθηματικών μας λέει , ότι ο μαθητής κατά την διαδικασία κατάκτησης (ή δόμησης) της

μαθηματικής γνώσης, θα επαναλάβει τα λάθη των μαθηματικών που ανεκάλυψαν την αντίστοιχη θεωρία. Βεβαίως έχουν διατυπωθεί αντιρρήσεις για την απόλυτη ισχύ του παιδαγωγικού σκέλους του νόμου αυτού[9], αλλά η βασική του ισχύς είναι θεμελιώδης στην σχεδίαση διδακτικών καταστάσεων κατά την εισαγωγή νέων εννοιών.

Συνεπώς η γνώση εκ μέρους του διδάσκοντα της ιστορικής εξέλιξης των εννοιών του απειροστικού Λογισμού εν προκειμένω , αποτελεί εκ των ων ουκ άνευ προϋπόθεση για την διδασκαλία του σε μαθητές και σπουδαστές .

Επ΄ αυτού ενδιαφέρον έχει η σταχυολόγηση γνωμών κάποιων γνωστών επιστημόνων για την αξία της ιστορίας των μαθηματικών σε σχέση με την διδακτική τους εφαρμογή:

Horst Struve :

-Τα προβλήματα των μαθητών πολλές φορές είναι επιστημολογικά (σ.σ. τα επιστημολογικά προβλήματα είναι πιο γνωστά στην διδακτική με τον όρο «Επιστημολογικά εμπόδια[10]») και οφείλονται στην φύση αυτών των εννοιών.

---

[9] Για παράδειγμα , ο Brousseau (1983) υποστηρίζει, ότι παρά την κατάλληλη εκλογή των διδακτικών καταστάσεων, σε μερικές περιπτώσεις, το «παλιό» μοντέλο, βγαίνει ενισχυμένο μέσα από μια διαδικασία που είχε σκοπό να αντικαταστήσει κάποιο άλλο . Και αυτό γίνεται, ακόμα και όταν ο μαθητής πείθεται ότι το «νέο» μοντέλο είναι καλύτερο από το «παλιό» . Εδώ, το πεδίο έρευνας ανήκει πλέον στον χώρο της Ψυχολογίας και όχι της Επιστημολογίας.

[10] **Ο Alain Duroux** ορίζει ένα επιστημολογικό εμπόδιο με 4 χαρακτηριστικά:

α)Είναι μια γνώση με ένα αρκετό πεδίο εφαρμογής (ισχύει προφανώς για το άπειρο στα μαθηματικά)

β) Αυτή η γνώση προσπαθώντας να εφαρμοσθεί και σε άλλες καταστάσεις , προκαλεί λάθη που εντοπίζονται και αναλύονται μόνο σε σχέση με το εμπόδιο . (Ό,τι ισχύει για το πεπερασμένο, δεν ισχύει κατ΄ επέκτασιν και για το άπειρο)

γ)Το εμπόδιο αντιστέκεται στην προσπάθεια εξειδικευμένης εφαρμογής του. (λ.χ. σημαντικότατο ποσοστό μαθητών και σπουδαστών αλλά και κάποιο μη αμελητέο ποσοστό εκπαιδευτικών μαθηματικών στην ερώτηση: «Άθροισμα απείρων στο πλήθος θετικών πραγματικών αριθμών δίνει αποτέλεσμα άπειρο ή πεπερασμένο;» απαντά «άπειρο» παρ΄ότι έχει θεωρητικά διδαχθεί (ή και διδάξει) ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$)

δ) Η απόρριψη της γνώσης που συναντά επιστημολογικό εμπόδιο, δημιουργεί τη νέα γνώση. (Εδώ η «γνώση» ότι άπειροι θετικοί έχουν πάντα άπειρο άθροισμα κλονίζεται αποφασιστικά. Πρέπει όμως να προκληθεί έντονη και κατάλληλη γνωστική σύγκρουση με κατάλληλο πρόβλημα που θα θέσει το αναφορικό νόημα της πρότασης.)

Εξ άλλου η **Sierprinska** δίνει τον ορισμό του επιστημολογικού εμποδίου ως εξής:

Αν το εμπόδιο δεν είναι δικό μας εμπόδιο, ή πιθανόν και δύο άλλων ανθρώπων, αλλά είναι πιο πλατειά διαδεδομένο , ή έχει διαδοθεί κάποια φορά σε κάποιο πολιτισμό, αυτό λέγεται επιστημολογικό εμπόδιο. Η ίδια η φύση των επιστημολογικών εμποδίων είναι τέτοια , που δεν μπορούν να αποφευχθούν και ο ρόλος τους στην σκέψη μας είναι σημαντικός .

-Πρέπει να μελετήσουμε την Ιστορία των μαθηματικών, γιατί τα προβλήματα που εμφανίσθηκαν , είναι παρόμοια με αυτά που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μας.

E.Berbin :

- Η Ιστορία των μαθηματικών είναι μια μορφή «θεραπείας» του δογματισμού στην διδασκαλία των μαθηματικών.
- -Η ιστορία μας βοηθά να συλλάβουμε την σημασία και το νόημα των μαθηματικών εννοιών και θεωριών.

Paolo Boero :

- Να οδηγούμε τους μαθητές σε μια διδακτική «προβληματική» κατάσταση, υποχρεώνοντάς τους να περάσουν από τα ιστορικά στάδια κατασκευής μιας έννοιας

Francesco Speranza :

-Να παρατηρούμε τα επιστημολογικά εμπόδια που έπρεπε να ξεπεράσει η ανθρωπότητα για να περάσει από την μια θεωρία στην άλλη . Παρόμοια προβλήματα αντιμετωπίζουν κι οι μαθητές μας.

5.2. Μεγάλα λάθη , μεγάλων μαθηματικών!

Η Ιστορία των μαθηματικών γέμει από λάθη και μάλιστα από λάθη γιγάντων της σκέψης. Αυτό δεν θα πρέπει να ξενίζει τον αναγνώστη, αφού είναι λογικό οι πρώτοι που θα έλθουν σε επαφή με τα μεγάλα προβλήματα και τα συνακόλουθα επιστημολογική εμπόδια που μπορούν να υποκρύπτονται είναι οι ερευνητές μιας επιστήμης . Το παράδοξο είναι να αγνοούνται αυτά τα προβλήματα και να παρουσιάζονται έννοιες, που έχουν μια τεράστια ιστορική διαδρομή μαθηματικού κτισίματος και κατασταλάγματος , με υπεραπλουστευμένο τρόπο. Με τρόπο , που να αγνοεί ή να προσπερνά το είδος των διδακτικών και επιστημολογικών εμποδίων που νομοτελειακά προκύπτουν κατά την διδασκαλία τους.

Επιστημονικές ρήξεις με κατεστημένες αντιλήψεις γίνονται συνεχώς στην ιστορία των θετικών επιστημών. Ο Δαρβίνος είναι ένας επιστήμονας που προεκάλεσε τεράστια ρήξη με τις κατεστημένες , παγιωμένες αντιλήψεις της

εποχής του. Το ίδιο και ο Φρόϋδ με την ψυχανάλυση, ο Αϊνστάιν με την γενική και ειδική θεωρία της σχετικότητος .

Η ανακάλυψη της υπεραγωγιμότητας στην Φυσική ακόμα και σε θερμοκρασίες -60^o C κατέστησε μουσειακά τα μέχρι πρό τινος διδασκόμενα βιβλία Ηλεκτρισμού που έλεγαν ότι «για όλους τους αγωγούς του ηλεκτρικού ρεύματος ισχύει $R_\theta = R_0(1+\frac{1}{273}\theta)$, όπου R_θ η αντίσταση του αγωγού σε θερμοκρασία θ^0 C και R_0 η αντίσταση του αγωγού στους 0^0 C. Το υπόδειγμα που υποδηλώνεται από τον τύπο αυτό, δίνει μηδενισμό της ωμικής αντίστασης ενός αγωγού μόνο στο απόλυτο μηδέν δηλ. τους -273^0 C . Η ανακάλυψη υλικού που δεν υπήκουε στο παλαιό υπόδειγμα (μοντέλο) ήταν ένα αντιπαράδειγμα στο «Δια κάθε αγωγό…» του υποδείγματος. [11]

Θα έλεγε κάποιος , ότι τα λάθη στις Φυσικές επιστήμες και οι συνεπακόλουθες αναθεωρήσεις των μοντέλων που περιγράφουν την Φύση, είναι συχνότατα λόγω της ατελούς επαγωγής που χρησιμοποιούν , δηλαδή εξάγουν συμπεράσματα από το ειδικό για το γενικό , πράγμα που είναι πάντα επισφαλές στο «πειραματικό αντιπαράδειγμα» ή παρατήρηση , που θα προκύψει και θα ανατρέψει ή τροποποιήσει την υπάρχουσα θεωρία. Εκ πρώτης όψεως υποτίθεται ότι τέτοια φαινόμενα δεν μπορούμε να έχουμε στον χώρο των μαθηματικών , λόγω της αξιωματικής θεμελιώσεώς τους και της Ελληνικής παράδοσης της αυστηρής διαπραγμάτευσής τους που κυρίως επέβαλαν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, αφού εδιδάσκοντο σχεδόν ατόφια μέχρι των ημερών μας.

Δεν είναι φυσικά έτσι, αφού η Ιστορία των Μαθηματικών όπως προείπαμε γέμει λαθών. Ας δούμε μερικά:

[11] Το 1908 ο Onnes το παρετήρησε στους -271^o C , μηδενισμό της ηλ. αντίστασης. Το 1960 έγινε μια σοβαρή προσπάθεια ερμηνείας του φαινομένου, καθώς βρέθηκαν υλικά που μηδένιζαν την ωμική τους αντίσταση στους -130^o C , Τέλει της δεκαετίας του 80 και αρχές της δεκαετίας του 90 , έγινε πολύ σοβαρή έρευνα σε τέτοια υλικά , αφού μια από τις πολύ σπουδαίες εφαρμογές τους είναι στην κατασκευή κυκλωμάτων για «γρήγορους» Η/Υ ή και για τραίνα που ίπτανται λίγα εκατοστά από το έδαφος για μηδενισμό των τριβών και επίτευξη υψηλότατων ταχυτήτων..

5.2.1. Η πλάνη του Πυθαγόρα

Στα μαθηματικά η πρώτη τεράστια ρήξη αναλόγου σπουδαιότητος είναι η ανακάλυψη των αρρήτων από τους Πυθαγορείους στον 5^{o} αιώνα π.Χ. . Η παλαιά επιστημονική κατάσταση έλεγε ότι «Όλοι οι αριθμοί γράφονται υπό μορφή κλάσματος με ακεραίους όρους» και η νέα ότι «Μερικοί αριθμοί γράφονται υπό μορφή κλάσματος» Αμέσως υποτίθεται ότι όλοι οι προγενέστεροι και ο Πυθαγόρας ,«έκαναν λάθος»Την γεφύρωση του χάσματος έκανε ο Εύδοξος γύρω στο 370 π.Χ. που είναι και ο συγγραφέας του πέμπτου βιβλίου των «Στοιχείων» με τον αναθεωρημένο, εξαιρετικά ιδιόμορφο αλλά και ιδιοφυή ορισμό της αναλογίας , ο οποίος συμπεριελάμβανε και άρρητα μεγέθη ή μεγέθη έχοντα άπειρη ανθυφαίρεση.

Σήμερα γνωρίζουμε κάτι πάρα πολύ ισχυρότερο για το πλήθος των ρητών και των αρρήτων: Αν βάλουμε σε μια φανταστική κληρωτίδα όλα τα στοιχεία του $\mathbb{Q}$ μαζί με όλους τους αρρήτους που μπορούν να προκύψουν ως ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων με ακεραίους συντελεστές , τότε θα έχω όλους τους αλγεβρικούς αριθμούς A . Επί πλέον θέτουμε στην κληρωτίδα τα στοιχεία απείρων στο πλήθος , (αλλά αριθμησίμων) αντιγράφων του A . Αν θεωρήσω το σύνολο $B=(0\ ,\ 10^{-10000000000})$ που έχει το ελάχιστο «πλάτος» $10^{-10000000000}$ και θέσω στην κληρωτίδα μόνο τα στοιχεία του $B\backslash\mathsf{A}$, τότε η πιθανότητα με μια δοκιμή να επιλέξω στοιχείο που να ανήκει στο A ή σε κάποιο αντίγραφό του είναι ….μηδέν! Αυτό το εκπληκτικό και απίστευτο εκ πρώτης όψεως γεγονός, οφείλεται στο ότι το σύνολο των Αλγεβρικών είναι αριθμήσιμο , ενώ το B είναι υπεραριθμήσιμο , και παράλληλα ισχύει ότι «άπειρη αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων , δίνει αριθμήσιμο σύνολο» Θα μπορούσε το B να αντικατασταθεί με το σύνολο του Cantor[12] το οποίο είναι

---

[12]Το σύνολο του Contor ορίζεται ως εξής: Θεωρούμε το σύνολο [0,1] . Το τριχοτομούμε και εξαιρούμε το μεσαίο τμήμα του $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Απομένει το $\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$ κάθε ένα από τα δύο τμήματά του, το τριχοτομούμε και εξαιρούμε το μεσαίο κ.ο.κ. επ΄ άπειρον. Το σύνολο που προκύπτει από αυτή την επ΄άπειρον διαδικασία λέγεται «Σύνολο του Cantor» και έχει πάρα πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες. (Βλέπε και Σ.Νεγρεπόντης Σ. Γιωτόπουλος Ε. Γιαννακούλιας «Απειροστικός Λογισμός» Τόμος Ι. σελ. 260)

κι αυτό υπεραριθμήσιμο, αλλά τρόπον τινά «χωρίς μήκος» (αυστηρά έχει μέτρο μηδέν ως προς το σύνηθες μέτρο στο $\mathbb{R}$.)

5.2.2.Οι «αδύνατοι αριθμοί» του Euler κ.α.

Το 1770 ο **Euler** γράφει ότι οι ρίζες των αρνητικών αριθμών είναι «αδύνατοι αριθμοί» ενώ ακόμα και μετά 86 έτη , το 1856 ο De Morgan γράφει ότι «Το σύμβολο $\mathbb{Z}$ είναι ανερμήνευτο» Οι Φανταστικοί αριθμοί δεν έχουν ακόμη γίνει αποδεκτοί , θα λέγαμε ούτε καν οι αρνητικοί . Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η αυτοβιογραφία του **Stendhal**[13] , στην οποία γράφει ότι όταν ήταν 14 ετών (δηλ το 1797) δεν μπορούσε να καταλάβει τον κανόνα των προσήμων μεταξύ δύο αρνητικών αριθμών. Γιατί δηλαδή «πλην επί πλην δίνει αποτέλεσμα συν» Μοιάζει απίστευτο, αλλά ακόμα και το 1920 δεν είχε δοθεί ικανοποιητική απάντηση σε αυτό το πρόβλημα, παρ΄ ότι η εμφάνιση των αρνητικών αριθμών είναι κατά πολύ παλαιοτέρα. Η ύπαρξη αρνητικών αριθμών στην λύση ενός προβλήματος με εξίσωση μάλιστα ήταν τόσο ενοχλητική, ως προς το αναφορικό της νόημα , ώστε ο Descartes προέτεινε να αλλάζονται οι συντελεστές της εξίσωσης όταν προκύπτουν «λάθος» (:=αρνητικές) λύσεις.

Για να γίνει πλήρως κατανοητό του τι έλεγε ο Descartes δίνουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα :

«Ο Γιάννης είναι 45 ετών και η κόρη του Ευγενία 12 ετών . Σε πόσα χρόνια θα έχει τετραπλάσια ηλικία από την κόρη του;»

Λύση: έστω ότι αυτό θα επιτευχθεί μετά χ έτη. Τότε θα ισχύει:

$45+\chi=4(12+\chi) \Leftrightarrow 45-48=4\chi-\chi \Leftrightarrow 3\chi=-3 \Leftrightarrow \chi=-1$. Άρα αυτό δεν θα επιτευχθεί στο μέλλον, και έχει ήδη πραγματοποιηθεί πριν ένα χρόνο.

Ο **Descartes** για το ίδιο πρόβλημα θα έλεγε ότι κακώς προσθέσαμε το χ υποθέτοντας a priori την πραγματοποίηση του γεγονότος στο μέλλον . Θα έπρεπε να επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα και να πούμε «πριν πόσα χρόνια είχε τετραπλάσια ηλικία» ,να βάλουμε –χ και να βρούμε χ=1 αποφεύγοντας την αρνητική τιμή.

[13] Stendhal (Henri-Marie Beyle) 1783-1842 Διάσημος Γάλλος ευπατρίδης συγγραφέας .

Την ίδια θεώρηση είχε και ο Fermat , οποίος και αυτός θεωρούσε ως «λάθος» τις αρνητικές ρίζες μιας εξίσωσης. Σήμερα ίσως να θεωρούμε δεδομένη την «φυσική ερμηνεία» της αρνητικής ρίζας στο πραγματικό πρόβλημα που θέσαμε , αλλά αφού ενοχλείτο ο Descartes και ο Fermat , πρέπει να έχουμε τουλάχιστον κατά νου ως διδάσκοντες, κατά πόσο μπορεί να ενοχλείται και ο μικρός Νίκος της Β΄ Γυμνασίου.

. Στα 1803 ο **Carnot** γράφει:

«Έστω η αναλογία $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$. Αν δεύτερος όρος της αναλογίας (-1) ήταν μικρότερος του μηδενός, τότε θα ήταν και μικρότερος του 1 (δηλ. του πρώτου όρου της αναλογίας, του 1) . Τότε όμως και ο τέταρτος όρος της αναλογίας το 1, θα ήταν μικρότερος από τον τρίτο (-1) , πράγμα που αποτελεί αντίφαση.»

Και συνεχίζει ο Carnot : «Λόγω των αρνητικών παίρνουμε και κάτι άλλο παράλογο: Το (-3) είναι μικρότερο του (+2) . Εν τούτοις $(-3)^2 > (+2)^2$. Δηλαδή ανάμεσα σε δύο ποσότητες άνισες, το τετράγωνο της μικρότερης , είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο της μεγαλύτερης , κάτι που καταπλήσσει τον νου μας»

Αφού τον 19^{ο} αιώνα διετυπώνεντο τέτοιες απόψεις, είναι φυσικό μάλλον ο Wallis γύρω στα 1655 που παρ΄ ότι εισήγαγε τις απειροσειρές τα απειρογινόμενα και βρήκε εκπληκτικά αποτελέσματα στον Απειροστικό Λογισμό ως πρόδρομός του, να γράφει[14] ότι $\frac{1}{0} = \infty \;\; και \;\; -1 > \infty$

Στην μαθηματική βιβλιογραφία τα περισσότερα ιστορικά λάθη στις απαρχές του Απειροστικού Λογισμού , φαίνεται να τα έχει διαπράξει ο Euler , πράγμα που ίσως και να συνιστά απόδειξη ότι ήταν ο πλέον παραγωγικός μαθηματικός μετά την Αναγέννηση και ίσως όλων των εποχών. Το πλήθος των αποτελεσμάτων που φέρουν το όνομά του είναι μια ένδειξη. Είναι φυσικό λοιπόν να έχει διαπράξει και τα περισσότερα λάθη, μιας και τον 18^{ο} αιώνα που έδρασε επιστημονικά δεν είχε θεμελιωθεί η έννοια της σύγκλισης των σειρών και γι αυτό έλεγε λ.χ. ότι

$1-3+5-7+9-11+\ldots=0$. Σήμερα αυτό θα μπορούσε να θεωρηθεί ασυγχώρητο λάθος για ένα μαθητή ή πρωτοετή φοιτητή, μιας και η πρώτη

[14] Dirk J. Struik «Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών» εκδόσεις Ζαχαρόπουλος 1982 , σελ. 171.

πρόταση που διδάσκεται στο κεφάλαιο των Σειρών , είναι ότι «Ακαγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ είναι $\alpha_\nu \to 0$» Εδώ έχομε $\alpha_\nu = (-1)^\nu(2\nu+1)$ η οποία δεν είναι καν συγκλίνουσα και άρα ούτε η σειρά είναι δυνατόν να συγκλίνει. Στην πραγματικότητα μάλιστα, δεν υπάρχει σε οποιοδήποτε βιβλίο ούτε μία άσκηση μη σύγκλισης σειράς με γενικό όρο αυτού του τύπου (μη συγκλίνουσα ακολουθία) αφού συγκλίνουσες σειρές είναι μόνο κάποιες απ΄ αυτές που έχουν γενικούς όρους μηδενικές ακολουθίες. Έτσι λοιπόν με την σημερινή θεώρηση το λάθος φαίνεται εντελώς παιδαριώδες. Τότε, μόνο τέτοιο δεν ήταν, αφού ήταν λάθος ενός πραγματικού γίγαντα των Μαθηματικών!

Ο Euler χειρίστηκε απειροσειρές με αλγεβρικό τρόπο , κάτι που σήμερα γνωρίζουμε πώς γενικώς απαγορεύεται. Για παράδειγμα: έπαιρνε τον τύπο που σήμερα γνωρίζουμε ότι εκφράζει το άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου $n+n^2+n^3+......=\frac{n}{1-n}$ (1) και τον παρόμοιο τύπο $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=-\frac{n}{1-n}$ (2) , τους προσέθετε κατά μέλη και έβγαζε το συμπέρασμα ότι $...+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+n^3+......=0$. (3)

Το λάθος αυτό σήμερα θεωρητικά το γνωρίζει ένας μαθητής της Β΄ Λυκείου , αφού η σχέση (1) ισχύει μόνον όταν $|n|<1$ (*)ενώ η σχέση (2) ισχύει μόνον όταν $|\frac{1}{n}|<1 \Leftrightarrow |n|>1$ (**) Οι (*)& (**) δεν συναληθεύουν , συνεπώς η (3) δεν ισχύει για κανένα $n\in\mathbb{R}$. Να σημειωθεί όμως, ότι οι τύποι αυτοί δεν είχαν προκύψει με απειροστικές διαδικασίες ,αλλά ο (1) ήταν το ανάπτυγμα του διωνύμου $(1-n)^{-1}$ επί το n. Υποτίθεται ότι το διώνυμο του Newton αναπτύσσεται και με εκθέτη –1, επ΄ άπειρον . Ομοίως και ο τύπος (2) είναι το ανάπτυγμα του $(1-\frac{1}{n})^{-1}$. Με αυτές τις γενικεύσεις του , ο Euler είχε δεχθεί και ως σωστά αποτελέσματα, που η σημερινή αναγραφή τους προκαλεί το λιγότερο…φρίκη! Συγκεκριμένα , ξεκινώντας από τον τύπο

: $(1-n)^{-1} = 1+n+n^2+n^3+n^4+.....$, θέτοντας n =2 έβγαζε την απίστευτη [15] ισότητα –1=1+2+4+16+….

Στην θεμελίωση του απειροστικού λογισμού ο Euler και συγκεκριμένα στο έργο του «Διαφορικός Λογισμός» που δημοσίευσε το 1755 , έγραφε ότι μια απειροστή ποσότητα είναι αληθινά μηδέν . Συγκεκριμένα:

$a \pm ndx = a$, $dx \pm (dx)^{n+1} = dx$, $a\sqrt{dx} + cdx = a\sqrt{dx}$. Επακριβώς έγραφε:

«Υπάρχουν , επομένως , άπειρες τάξεις των απείρως μικρών ποσοτήτων. Παρ όλο που αυτές οι ποσότητες είναι όλες ίσες με μηδέν, υπάρχει σαφής διάκριση της μιας από την άλλη. Αρκεί να προσέξουμε την αμοιβαία σχέση τους , η οποία ερμηνεύεται με ένα γεωμετρικό λόγο.»

Βεβαίως την έννοια του απειροστού δεν την είχε διευκρινίσει πλήρως ούτε ο ίδιος ο **Leibniz** που μαζί με τον **Newton** θεωρούνται οι δύο βασικοί συνθεμελιωτές του Απειροστικού Λογισμού. Η έννοια του απειροστού ίσως να διευκρινίσθηκε μετά από δύο αιώνες στην δεκαετία του 60΄από τον A. Robinson με την θεμελίωση της «μη συμβατικής Ανάλυσης» Γράφουμε «ίσως να διευκρινίσθηκε» διότι το αντίτιμο για την «διευκρίνιση» είναι η μη ισχύς του αξιώματος των Αρχιμήδους –Ευδόξου. Κατά την γνώμη του γράφοντος μάλιστα, με μια αναλογικότητα , θα μπορούσαμε να δούμε αυτό το φαινόμενο ανάμεσα στην μη συμβατότητα των νόμων της κλασσικής Φυσικής και της Κβαντομηχανικής, όπως και στην μη συμβατότητα των νόμων της μικροοικονομίας και της μακροοικονομίας , δηλαδή ανάμεσα σε μικροκλίμακα και μακροκλίμακα. Το προηγούμενο είναι μια ενδιαφέρουσα ιδέα, που όμως χρειάζεται περαιτέρω προσέγγιση Επιστημολογική , Κυβερνητική και ίσως Φιλοσοφική.

Γεγονός όμως ήταν ότι τον 18^o αιώνα επικρατούσε μεγάλη σύγχυση με τα απειροστά αφού η έννοια του ορίου που γνωρίζουμε σήμερα δεν είχε θεμελιωθεί. Από την μία μεριά ήταν οι μαθηματικοί οι οποίοι ήσαν βέβαιοι για την ορθότητα των απειροστών , αφού έλυναν πραγματικά προβλήματα που δεν μπορούσε να λύσει η Γεωμετρία και από την άλλη μεριά ήσαν εκτεθειμένοι στην κριτική του Επισκόπου **Berkeley** ο οποίος επιτέθηκε στην θεωρία των

---

[15] Howard Eves «Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650» εκδόσεις ΤΡΟΧΑΛΙΑ τ.2 σελ. 179

ροών[16] του Newton το 1734 με το κείμενο «The Analyst» (Ο Αναλύστας) χλευάζοντας τα Απειροστά που άλλοτε τα θεωρούνε οι μαθηματικοί ως μηδέν και άλλοτε ως μη μηδέν. Τα παρομοίαζε με «φαντάσματα ποσοτήτων που απέρχονται» Πίστευε μάλιστα , ότι τα σωστά αποτελέσματα στα οποία έφθανε ο Απειροστικός Λογισμός ήταν αποτέλεσμα αλληλοαναιρούμενων λαθών. Οι Ροές του Νεύτωνα ήταν απαράδεκτες για τον Berkeley . Απευθυνόμενος μέσω του βιβλίου του στον «άπιστο Μαθηματικό» Halley έλεγε: «Αλλά όποιος μπορεί να χωνέψει μια δεύτερη ή μια τρίτη Ροή (:=παράγωγο) μια δεύτερη ή μια τρίτη διαφορά, δεν χρειάζεται νομίζω να τον πιάνει δυσπεψία για το οποιοδήποτε Σημείο του Θείου»

Και αλλού συνέχιζε: «Οι επιστήμονες επιτίθενται στην θρησκεία ως παράλογης. Ας βελτιώσουν λοιπόν τον τρόπο με τον οποίον οι ίδιοι σκέπτονται. Μια ποσότητα είναι μηδέν είτε όχι. Δεν υπάρχει τίποτε ενδιάμεσο.»

Τους μαθηματικούς της εποχής του ο Berkeley τους χαρακτήριζε ως ανθρώπους που «συνηθίζουν να υπολογίζουν , αντί να σκέπτονται»

Άλλο ένα σημαντικά ιστορικό παράδοξο και λάθος που προεκάλεσε μεγάλες συζητήσεις είναι η σειρά του **Guido Grandi** (1671-1742) Αυτός ήταν ένας καθηγητής ιερωμένος από την Πίζα , γνωστός για την μελέτη του για την ροδοειδή καμπύλη (σε πολικές συντεταγμένες r(t)=ημ(ωt) , $\omega \in \mathbb{R}$) καθώς και άλλων καμπυλών που μοιάζουν με άνθη. Ο Grandi ισχυρίζετο, ότι η διπλή ισότητα

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = (1-1) + (1-1) + (1-1) + ... = 0 + 0 + 0 + 0 + ...$$

είναι το σύμβολο της δημιουργίας εκ του μηδενός. Για να τεκμηριώσει το (απίστευτο με τα σημερινά κριτήρια) εξαγόμενό του, του έδωσε αναφορικό νόημα με ένα πρόβλημα, σύμφωνα με το οποίο, ένας πατέρας αφήνει κληρονομιά ένα διαμάντι σε δύο γιους του , υπό τον όρο να μένει το πετράδι εναλλάξ στην κατοχή εκάστου αδελφού ανά έτος. Έτσι στον κάθε γιο θα ανήκε το ήμισυ. Πριν καταλήξει σε αυτό το συμπέρασμα , Είχε παρατηρήσει, ότι αν αναδιαταχθούν κατάλληλα οι όροι της

[16] Σύμφωνα με την θεωρία των ροών του Newton , για να βρει την «ροή» (:=παράγωγο) της συνάρτησης $y=x^3+1$, όπου x έθετε x+0 και σχημάτιζε την διαφορά $[(\chi+0)^3+1]-[\chi^3+1]$. Διαιρούσε την διαφορά με το «0» Έκανε απλοποίηση του κλάσματος θεωρώντας το «0» ως οντότητα μη μηδενική και στην συνέχεια διέγραφε όσους όρους περιείχαν το 0 . Έφθανε έτσι στο σωστό αποτέλεσμα $3\chi^2$.

$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ....$ δίνουν ως αποτέλεσμα μηδέν (όπως είδαμε) ή 1 , διότι αν θέσουμε αλλιώς τις παρενθέσεις, θα έχουμε

$S = 1 - (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ... \Leftrightarrow S = 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - .... \Leftrightarrow S = 1$

έτσι ο Grandi κατέληξε στο τουλάχιστον μεταφυσικό συμπέρασμα ότι η αληθής τιμή του S είναι η μέση τιμή του 0 και 1 , δηλ το ½ ,το οποίο ενέδυσε και με την ιστορία του πατέρα με το διαμάντι.

Στο αποτέλεσμα ½ , μπορούμε να φθάσουμε και με μια άλλη προσέγγιση:

$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...) \Leftrightarrow$

$S = 1 - S \Leftrightarrow$

$2S = 1 \Leftrightarrow$

$S = \frac{1}{2}$

Το ίδιο απίστευτο αποτέλεσμα ½ υποστήριξε και ο πολύς **Leibniz** υποστηρίζοντας ότι αφού κάνει και 0 και 1 , η «αλήθεια» βρίσκεται στην μέση τιμή!

Σήμερα γνωρίζουμε ότι αυτή η απειροσειρά δεν έχει νόημα πραγματικού αριθμού και συνεπώς οποιοσδήποτε μαθηματικός της χειρισμός που την θεωρεί a priori ως αριθμό, δεν έχει νόημα.

Ο **Cauchy το 1821** διατύπωσε την πρόταση ότι «Αν η (f_n) είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f_n \to f$, τότε και η f είναι συνεχής» Η πρόταση αυτή σήμερα γνωρίζουμε ότι είναι λανθασμένη (βλ.Β17.1.2) Τα πρώτα αντιπαραδείγματα τα έδωσαν οι **Fourier και Abel** . Την οριστική απάντηση έδωσε ο **Seidel**[17] μετά από 26 χρόνια κάνοντας το αρχικό χτίσιμο της έννοιας της ομοιόμορφης συνέχειας.

Με το χρόνο συσσωρεύθηκαν πάρα πολλά παράδοξα και έγινε σαφές ότι τα μαθηματικά περνούσαν μια δεύτερη μεγάλη κρίση. Την πρώτη κρίση την έλυσε ο Εύδοξος με την εισαγωγή του νέου ορισμού για την αναλογία. Το τιτάνιο έργο για την αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού λογισμού θα το αναλάβουν οι **Lagrange , Gauss , Cauchy , Riemann** και την προσπάθεια αυτή θα την συστηματοποιήσει τελικώς ο **Weierstrass** με την λεγόμενη «αριθμητικοποίηση της Ανάλυσης» αφ΄ ενός και την εισαγωγή των «ε, δ , ορισμών» αφ΄ ετέρου.

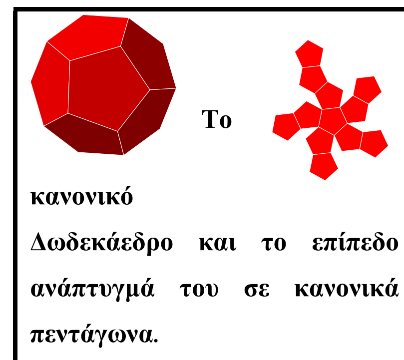
---

[17] Μια εξαιρετική προσέγγιση από επιστημολογική άποψη στην ιστορική αυτή διαμάχη, έχει κάνει ο Lakatos στις «Αποδείξεις και ανασκευές» εκδόσεις ΤΡΟΧΑΛΙΑ σελ.189-209

6. Οι Σημαντικές ιστορικές στιγμές του Απειροστικού Λογισμού και το αντιπαράδειγμα.

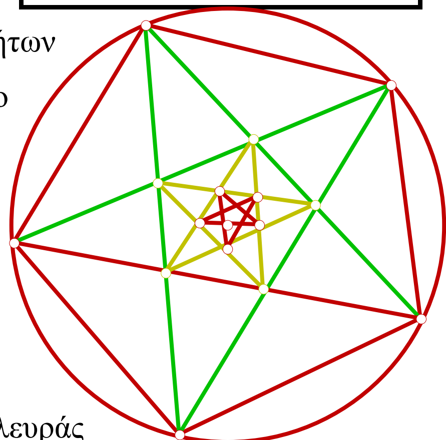
6.1. Η ανακάλυψη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$

Ήδη αναφέραμε , ότι η ανακάλυψη ότι ο λόγος της διαμέτρου τετραγώνου προς την πλευρά του , δηλ. το $\sqrt{2}$ έχει άπειρη (περιοδική) ανθυφαίρεση [1,22222222…….]ή (με σύγχρονο συμβολισμό) εκφράζεται με ένα απέραντο συνεχιζόμενο κλάσμα της μορφής $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$ ή δεν τίθεται υπό την μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ με α, β ακέραιους όρους, απετέλεσε αντιπαράδειγμα που κατέρριψε τον μέχρι τότε ισχυρισμό του Πυθαγόρα και της Σχολής του ότι «όλοι οι αριθμοί και οι μεταξύ τους σχέσεις έχουν λόγο ακεραίου προς ακέραιο».



Το κανονικό Δωδεκάεδρο και το επίπεδο ανάπτυγμά του σε κανονικά πεντάγωνα.

Κατά τον von Fritz[18] η ανακάλυψη των αρρήτων μεγεθών, πρέπει να αποδοθεί στον Πυθαγόρειο Ίππασο τον Μεταπόντιο, ο οποίος θα πρέπει να έκανε την ανακάλυψη σε πεντάγωνο , μιας και η κάτω Ιταλία γέμει κρυστάλλων πυριτίου που είναι κανονικά δωδεκάεδρα και σχηματίζονται από κανονικά πεντάγωνα



Θέλοντας ο Ίππασος να βρει το κοινό μέτρο πλευράς και διαγωνίου του κανονικού πενταγώνου με αμοιβαία υφαίρεση (:=ανθυφαίρεση), εκτελεί την σχετική Ευκλείδειο αλγοριθμική διαδικασία. Αυτή συνίσταται στο να βρούμε πόσες ακέραιες φορές η πλευρά χωρά στην διαγώνιο (εδώ μία φορά) και τι περισσεύει. Στην συνέχεια αυτό που περισσεύει πόσες ακέραιες φορές χωρά στην πλευρά (πάλι μία φορά) και τι

[18] Βλέπε και Διονυσίου Α. Αναπολιτάνου «Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών» εκδόσεις ΝΕΦΕΛΗ 1985 , σελ. 24-27.

περισσεύει[19] . Αυτό όμως που περισσεύει την δεύτερη φορά , είναι η πλευρά του μικρότερου κανονικού πενταγώνου . Έτσι , αυτή η αλγοριθμική διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον (όπως φαίνεται στο παραπλεύρως σχήμα) και είναι αδύνατον να πάρουμε ένα κοινό μέτρο , αφού δεν σταματάει ποτέ. Αν υπήρχε όμως κοινό μέτρο, οσοδήποτε μικρό, αυτή η ανθυφαιρετική διαδικασία θα διαρκούσε πεπερασμένα βήματα, επομένως δεν υπάρχει κοινό μέτρο μεταξύ πλευράς και διαγωνίου κανονικού πενταγώνου! Το άλλο είδος αριθμού που δημιουργείται εδώ εκφράζεται με την επ΄ άπειρον περιοδική ανθυφαίρεση [1,1111111……..] ή το συνεχές άπειρο κλάσμα

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots\ldots\ldots}}}}}$$

το οποίο εκφράζει τον λόγο της χρυσής τομής τον φ , όπου $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618.......$

6.2 Το μέρος είναι πάντοτε μικρότερο του όλου;- Το παράδοξο του Γαλιλαίου.

Είναι πάντα όπως νομίζει ο πολύς κόσμος το μέρος μικρότερο του όλου; Μέχρι την ανακάλυψη των αρνητικών αριθμών αυτό ήταν μια κοινή έννοια στον Ευκλείδη[20] και μια δεδομένη αρχή σε όλους τους ανθρώπους: Αλλά όμως , αντιπαραδείγματος χάριν ,η ανίσωση $\frac{1}{2}x > x$ με την απροσδόκητη μετάφραση «το ήμισυ είναι μεγαλύτερο του όλου» ,αληθεύει για κάθε x<0 . Αυτό και σήμερα αποτελεί ένα επιστημολογικό εμπόδιο για τα παιδιά του Γυμνασίου, αφού η αντίθετη ακριβώς πρόταση αποτελεί «κοινή έννοια» .

Τι γίνεται όμως με τις άπειρες οντότητες;

---

[19] Σε αυτά τα συμπεράσματα μπορεί να φθάσει ο αναγνώστης, αρκεί να παρατηρήσει ότι δημιουργούνται συνεχώς ισοσκελή τρίγωνα με γωνία κορυφής 36^0 και βάσης $72^0=2x36^0$ καθώς και ισοσκελή τρίγωνα με γωνία κορυφής $108^0 =3*36^0$ και βάσης 36^0.

[20] Η πέμπτη κοινή έννοια στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη «Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].»

Ήδη στις αρχές του 17ου αιώνα, ο **Γαλιλαίος** επεξεργάστηκε τα παράδοξα του απείρου[21], και παρατήρησε ότι είναι δυνατόν να οριστεί μία «1-1» και επί αντιστοιχία ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς και τα τετράγωνά τους. Το βιβλίο του με τίτλο «*Συζητήσεις και μαθηματικές αποδείξεις για δύο νέες επιστήμες που αναφέρονται στη μηχανική και στις τοπικές κινήσεις» (1638)* περιλαμβάνει ένα διάλογο στον οποίο ο **Salviati,** εκφράζοντας τις ιδέες του Γαλιλαίου, λέει τα ακόλουθα:

«Ό,τι είπαμε αφορά ένα πλήθος δυσκολιών που ανακύπτουν διότι, όταν χρησιμοποιούμε τις περιορισμένες νοητικές μας ικανότητες για να συζητήσουμε σχετικά με το άπειρο, αποδίδουμε σ' αυτό ιδιότητες που γνωρίζουμε από πράγματα πεπερασμένα και φραγμένα. Τούτο όμως είναι εσφαλμένο, διότι ιδιότητες όπως το μεγαλύτερο ή το μικρότερο μέγεθος και η ισότητα δεν εφαρμόζονται στο άπειρο· δεν μπορούμε να πούμε ότι ένα άπειρο είναι μικρότερο από ένα άλλο, ή ότι ένα άπειρο είναι ίσο με ένα άλλο.»

Για να αποδείξει την ιδέα του, ο **Salviati** επισημαίνει ότι, αφ' ενός, *«τα τετράγωνα είναι τόσα όσες και οι ρίζες, αφού κάθε τετράγωνο έχει τη ρίζα του και κάθε ρίζα το τετράγωνό της· κανένα τετράγωνο δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μία ρίζες, και καμία ρίζα περισσότερα από ένα τετράγωνα ... Επίσης, οι ρίζες είναι τόσες όσοι και οι αριθμοί, διότι δεν υπάρχει αριθμός που δεν μπορεί να γραφτεί ως ρίζα κάποιου τετραγώνου· επειδή έτσι έχουν τα πράγματα, πρέπει να παραδεχτούμε ότι τα τετράγωνα είναι τόσα όσοι και οι αριθμοί.....»*

αλλά, αφ' ετέρου

«το πλήθος των αριθμών —τετραγώνων και μη— είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των τετραγώνων,»

και επίσης, *«όσο προχωρούμε προς μεγάλους αριθμούς, το πλήθος των τετραγώνων μειώνεται συνεχώς και ταχύτατα.»*

Σύμφωνα με τον **Salviati,** μόνο ένας τρόπος υπάρχει για να αποφύγουμε την παραπάνω αντίφαση:

[21] Το καλύτερο στα Ελληνικά βιβλίο για το μαθηματικό άπειρο , είναι το «Αναζητώντας το άπειρο» του Naum Yakovlevich Vilenkin. Είναι ένα μικρό βιβλίο, εξαιρετικά εκλαϊκευμένο και ταυτόχρονα εξαιρετικά επιστημονικό και πλήρες , πράγμα που υπό συνήθεις προϋποθέσεις θα αποτελούσε αντίφαση. Η φαινομενική «αντίφαση» αίρεται με τη μαεστρία και πληρότητα που παρουσιάζει το θέμα ο συγγραφέας και με την άρτια μεταφραστική εργασία που έχει γίνει.

«Δεν βλέπω άλλη λύση από το να παραδεχτούμε ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί, άπειρα τετράγωνα και άπειρες ρίζες. Δεν μπορούμε να πούμε ότι τα τετράγωνα είναι λιγότερα από τους αριθμούς ή ότι οι αριθμοί είναι περισσότεροι από τα τετράγωνα: σε τελική ανάλυση, οι ιδιότητες της ισότητας και του μικρότερου ή του μεγαλύτερου μεγέθους είναι εφαρμόσιμες μόνο στις πεπερασμένες ποσότητες, και όχι όταν ασχολούμαστε με το άπειρο.»

Ουσιαστικά, τα παραπάνω *δείχνουν* ότι ο Γαλιλαίος είχε επίγνωση της έννοιας της αμφιμονοσήμαντης («1-1» και επί) αντιστοιχίας, είχε αντιληφθεί ότι μια τέτοια αντιστοιχία μπορεί να οριστεί ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς και τα τετράγωνά τους, και ότι, συνεπώς μπορούσε κανείς να πει ότι τα εν λόγω σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Είχε αντιληφθεί, επίσης, ότι είναι δυνατό το μέρος να είναι ίσο με το όλον στην περίπτωση ενός απειροσυνόλου. Κατέληξε όμως στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι όλα τα άπειρα είναι ίδια. Αυτό ισχύει όσον αφορά τα υποσύνολα του συνόλου των φυσικών αριθμών, τα οποία έχουν άπειρα στοιχεία που είναι δυνατόν να αριθμηθούν.

Ο Γαλιλαίος δεν μπορούσε να φανταστεί ότι το σύνολο των σημείων ενός διαστήματος δεν είναι δυνατόν να απαριθμηθεί Όπως οι αρχαίοι ατομικοί φιλόσοφοι, υπέθεσε και αυτός ότι ένα διάστημα αποτελείται από άπειρο πλήθος αδιαίρετων μερών τα οποία μπορούν να αριθμηθούν. **Το αντιπαράδειγμα εδώ θα έλθει από τον Cantor και το περίφημο διαγώνιο επιχείρημά του**, που θα δούμε παρακάτω.

6.3. Ο Cantor ανακαλύπτει την άλλη διάσταση του απείρου. Το $\mathbb{N}$ ισοπληθικό με το $\mathbb{Z}$ και το $\mathbb{Q}$!

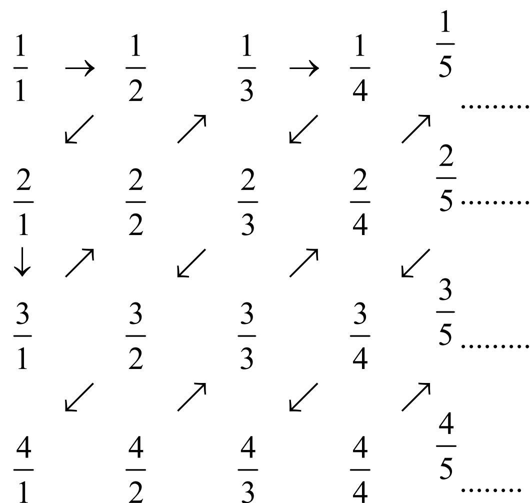
Έτσι, οι άρτιοι φυσικοί παρ΄ ότι φαίνονται να είναι οι μισοί σε σχέση με όλους τους φυσικούς , υπάρχει απεικόνιση f από το $\mathbb{N}$ στο σύνολο των αρτίων με $f(n)=2n$ που είναι «1-1» και επί. Ομοίως και το παράδειγμα του Γαλιλαίου αντιστοιχίζει τους τετράγωνους φυσικούς με όλους τους φυσικούς, παρ΄ ότι οι τετράγωνοι εμφανίζονται με όλο και μικρότερη συχνότητα αυξανομένου του n . Αυτό μπορεί να το διαπιστώσει κάποιος αν θεωρήσει την ταυτότητα $(n+1)^2-n^2=2n+1$ η οποία κατ΄ ουσίαν λέει ότι η απόσταση δύο διαδοχικών τετραγώνων είναι (σχεδόν) ανάλογη του n , ή αλλιώς, η απόσταση

μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων δεν είναι φραγμένη και άρα μπορεί να γίνει απεριόριστα μεγάλη. Ο Γαλιλαίος αντί για τα τετράγωνα θα μπορούσε να θεωρήσει του κύβους ή και οποιαδήποτε δύναμη που η κατανομή τους στο $\mathbb{N}$ φαίνεται να είναι ακόμα «πιο αραιή» από τα τετράγωνα και να καταλήξει στο ίδιο συμπέρασμα. Φαίνεται λοιπόν, ότι κάθε γνήσιο αλλά άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ να είναι ισοπληθικό με το ίδιο το $\mathbb{N}$. Τι γίνεται όμως με τα υπερσύνολα του $\mathbb{N}$; Για το $\mathbb{Z}$ έχω ότι κι αυτό έχει τον ίδιο πληθικό αριθμό με το $\mathbb{N}$, αφού μπορώ να ορίσω συνάρτηση

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\ \mu\varepsilon\ f(z)=\begin{Bmatrix} 2z,\ \alpha\nu\ z\ge 0 \\ -1-2z,\alpha\nu\ z<0 \end{Bmatrix}$$

η οποία όπως μπορούμε εύκολα να δείξουμε είναι «1-1» και επί.

Για το $\mathbb{Q}$ ήλπιζε ο ο Cantor , ότι δεν θα είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$.[22] Μην ξεχνάμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ [23]και φυσικά πυκνό και στον εαυτό του. Παρ΄ όλα αυτά έκπληκτος ανεκάλυψε ότι κι αυτό είναι του ιδίου πληθικού αριθμού , αφού κατόρθωσε να θέσει σε «1-1» και επί αντιστοίχιση τα στοιχεία του $\mathbb{Q}$ με τα στοιχεία του $\mathbb{N}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Για να εξηγηθεί αυτή η «βουστροφηδόν» διαγώνια απαριθμητική διάταξη, πρέπει να παρατηρήσουμε τα εξής:

[22] Υπενθυμίζουμε ότι τον πληθικό αριθμό των φυσικών τον απεκάλεσε ο Cantor «άλεφ μηδέν» χρησιμοποιώντας το πρώτο γράμμα του Εβραϊκού αλφαβήτου άλεφ με δείκτη μηδέν : $\aleph_0$ Τον ίδιο πληθικό αριθμό έχουν και όσα σύνολα μπορούν να τεθούν σε «1-1» και επί αντιστοίχιση με το $\mathbb{N}$.

[23] «Το Q είναι πυκνό στο R»σημαίνει , ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς (οσοδήποτε κοντινούς) πάντα υπάρχει ρητός.

Στην πρώτη σειρά γράφουμε όλα τα κλάσματα που έχουν αριθμητή το 1 , στην δεύτερη όλα τα κλάσματα με αριθμητή το 2 , στην τρίτη όλα τα κλάσματα με αριθμητή το 3 , κ.ο.κ. Έτσι, ένα κλάσμα μπορεί να επαναλαμβάνεται άπειρες φορές, (π.χ. $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=.......$)αλλά αυτό δεν επηρεάζει την απαρίθμηση αφού σαρώνονται όλοι οι ρητοί έστω κι αν κάποιοι σαρώνονται άπειρες φορές[24] .

6.4. Το Í είναι ισοπληθικό με το σύνολο À των αλγεβρικών!

Υπενθυμίζουμε, ότι αλγεβρικοί είναι όλοι οι αριθμοί που μπορούν να προκύψουν ως ρίζες πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές. Προφανώς όλοι οι ρητοί είναι αλγεβρικοί , αλλά και κάθε αριθμός που μπορεί να προκύψει ως εξαγόμενο ρητών μέσα από μια παράσταση που περιέχει πεπερασμένες φορές[25] τα σύμβολα της πρόσθεσης της αφαίρεσης του πολλαπλασιασμού της διαίρεσης της ύψωσης σε δύναμη και της εξαγωγής ρίζας οιασδήποτε τάξεως . Ουσιαστικά , οι αλγεβρικοί περιέχουν όλους τους ρητούς και όλες τις ρίζες ρητών οιασδήποτε τάξεως. Η απόδειξη χρησιμοποιεί την έννοια του ύψους ενός πολυωνύμου:

Αν $P(\chi)=\alpha_\nu\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\chi+\alpha_0$ με $\alpha_i \in \mathbb{N}$ και $h \geq 1 \in \mathbb{N}$ και $\alpha_\nu \neq 0$,και $P(\chi)=0$, τότε ως ύψος h ορίζουμε τον αριθμό $h=\nu+\alpha_0+|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$. Μπορώ να θεωρώ πάντα ότι $\alpha_0>0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας , (διότι αν $\alpha_0<0$, αλλάζω τα πρόσημα στην εξίσωση και έχω μια ισοδύναμη.) Προφανώς $h \in \mathbb{N}$ και $h \geq 1$. Επίσης εύκολα φαίνεται, ότι υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος πολυώνυμα με δεδομένο ύψος h. Γνωρίζουμε επίσης, ότι ένα πολυώνυμο βαθμού ν έχει το πολύ ν διαφορετικές ρίζες. Με βάση αυτά , μπορούμε να βάλουμε σε μια σειρά όλους τους αλγεβρικούς αριθμούς που

---

[24] Στην πραγματικότητα, όλοι οι ρητοί σαρώνονται άπειρες φορές, αφού ο τυχών $\frac{\kappa}{\lambda}$ με (κ,λ) =1 εμφανίζεται πρώτη φορά στην κ –οστή γραμμή και στην λ-οστή στήλη, αλλά και στην νκ-οστή γραμμή και νλ-οστή στήλη, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ δηλ. κάθε ρητός σαρώνεται άπειρες (αριθμήσιμες) φορές.

[25] Η πεπερασμένη εφαρμογή των πράξεων είναι αναγκαία, διότι επί αντιπαραδείγματι, $1+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots+\ldots=e$ και ο e αποδεικνύεται ότι δεν είναι αλγεβρικός είναι δηλ. είναι υπερβατικός. Η πλήρης και λεπτομερής απόδειξη αυτού υπάρχει στο διαδίκτυο σε εργασία του υποφαινομένου και μπορεί να αναζητηθεί με τις λέξεις –κλειδιά «υπερβατικότητα , e, π »

προκύπτουν από πολυώνυμα ύψους h=1 , αφού είναι πεπερασμένοι στο πλήθος, παραλείποντας όσους τυχόν επαναλαμβάνονται. . Στην δεύτερη σειρά , ομοίως μπορούμε να καταγράψουμε όλους τους αλγεβρικούς που προκύπτουν από πολυώνυμα ύψους h=2 κ.ο.κ. Έτσι μπορούμε να τους απαριθμήσουμε όλους , αντιστοιχίζοντάς τους κατ΄ ουσίαν με όλα τα στοιχεία του Í !

6.5. Το (0,1) έχει περισσότερα στοιχεία από το Í !

Μετά από αυτό ο Cantor άρχισε να πιστεύει ότι και το σύνολο (0,1) έχει πληθικό αριθμό $\aleph_0$, αλλά προς μεγάλη του έκπληξη δεν ήταν έτσι! …...

Υπέθεσε ο Cantor ότι υπάρχει απαρίθμηση για όλους τους αριθμούς του (0,1) . Τότε όμως θα μπορούσαμε να τους γράψουμε σε μια σειρά όπως στο παρακάτω σχήμα με το δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Η δεκαδική ανάπτυξη είναι μοναδική, αν απαιτήσουμε όταν τυχαίνει ο αριθμός να είναι σε μορφή με περιοδική μορφή με περίοδο το 9 , και το τελικό δεκαδικό τμήμα του είναι ……α9999999999999……., τότε να τίθεται στην ισοδύναμη μορφή του (α+1)0000000000………όπου α ψηφίο διάφορο του 9 .

Π.χ. 0,699999999……=0,7 ή 0,8999999999…….=0,9 ή 0,45679999999……=0,4568

$$a_1 = 0,a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots a_n^1 \ldots$$
$$a_2 = 0,a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots a_n^2 \ldots$$
$$a_3 = 0,a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots a_n^3 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = 0,a_1^n a_2^n a_3^n \ldots\ldots\ldots\ldots a_n^n \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Θεώρησε έπειτα ο Cantor τον αριθμό $a = 0, a_1^1 a_2^2 a_3^3 ......a_n^n......$ ο οποίος προκύπτει αν πάρουμε τα διαγώνια στοιχεία των αριθμών που έχομε μέχρι στιγμής υποθέσει ότι έχουν αντιστοιχηθεί με το $\mathbb{N}$.

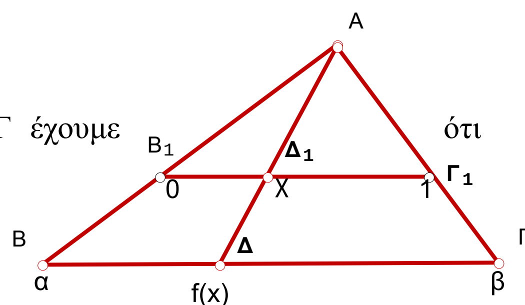
Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τον αριθμό $\beta = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 ......\beta_n........$ σύμφωνα με τον εξής (ελεύθερο[26]) κανόνα $\beta_1 \neq \alpha_1^1$, $\beta_2 \neq \alpha_2^2$, $\beta_3 \neq \alpha_3^3$, $.....,\beta_n \neq \alpha_n^n......$ Τότε ισχυριζόμαστε ότι ο αριθμός β που κατασκευάσαμε, δεν ανήκει στην απαρίθμηση του (0,1) που έχομε θεωρήσει, διότι διαφέρει από κάθε ένα τουλάχιστον κατά το διαγώνιο ψηφίο εκ κατασκευής. Φθάσαμε επομένως σε άτοπο υποθέτοντας ότι όλα τα στοιχεία του (0,1) απαριθμούνται . Επομένως τα στοιχεία του (0,1) δεν είναι δυνατόν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$.

Έκτοτε η απόδειξη αυτή λόγω της κατασκευής της , έμεινε στην Ιστορία των Μαθηματικών ως «Διαγώνιο επιχείρημα του Cantor»

Στην συνέχεια ο Cantor συνέχισε την εργασία του και φάνηκε ότι το (0,1) είναι ισοπληθικό με οποιοδήποτε διάστημα (α,β) με α, β >0 οσοδήποτε μεγαλύτερου πλάτους όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα:

Από τα όμοια τρίγωνα $AB_1\Delta_1$ και ΑΒΔ έχουμε ότι:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{x-0}{f(x)-a} (1)$$



Από τα όμοια τρίγωνα $AB_1\Gamma_1$ και ΑΒΓ έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{AB}_1}{\mathrm{AB}} = \frac{1-0}{\beta - \alpha} \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι

$$f(x) = (\beta - \alpha)\chi + \alpha$$

η οποία αν οριστεί με πεδίο ορισμού το (0,1) , έχει πεδίο τιμών το (α,β) και είναι «1-1» και επί.

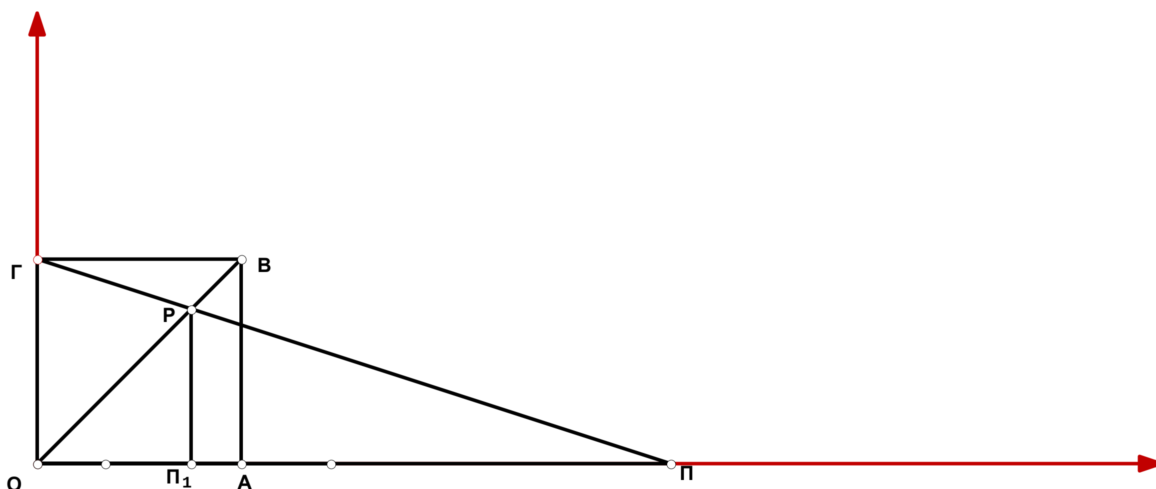
Αναλόγως εργαζόμαστε και όταν το (α,β) είναι μικροτέρου πλάτους είτε τα α, β παίρνουν αρνητικές τιμές.

---

[26] Χαρακτηρίζουμε ως «ελεύθερο» τον κατασκευαστικό κανόνα διότι ο β δεν προκύπτει αναγκαστικά μονοσήμαντα. Θα μπορούσαμε να τον «στενέψουμε» για να προκύπτει ο β μονοσήμαντα θέτοντας λ.χ. $\beta_n = \left\{ \begin{matrix} 2 \ \alpha\nu \ \ \alpha_n^n \neq 2 \\ 1 \ \alpha\nu \ \ \alpha_n^n = 2 \end{matrix} \right\} n \in \mathbb{N}$

6.6. Το ευθύγραμμο τμήμα είναι ισοπληθικό σε σημεία με ημιευθεία ή με ευθεία!

Αν για τα διαστήματα φαίνεται τρόπον τινά «φυσιολογική» η ισοπληθικότητα, δεν συμβαίνει το ίδιο ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και ημιευθεία όπως και ανάμεσα σε ευθ. τμήμα και ευθεία . Ο Λόγος είναι το πεπερασμένο του μήκους για το ευθύγραμμο τμήμα και το άπειρο του μήκους για ημιευθεία και ευθεία. Και εδώ όμως, έχω ισοπληθικότητα όπως φαίνεται από τα παρακάτω γεωμετρικά υποδείγματα:



Το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο[27]. Το ΟΑ είναι το διάστημα [0,1] . Π_1 είναι το τυχόν χ που ανήκει στο [0,1] . Το Π_1 , απεικονίζεται με την κάθετη στο σημείο Ρ της διαγωνίου ΟΒ και έπειτα μέσω της προέκτασης της ΓΡ , το Π_1 απεικονίζεται στο Π της ημιευθείας. Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΟΠΓ και Π_1ΠΡ , έχομε την ισότητα λόγων $\frac{\text{ΟΠ}}{\text{ΟΠ}-\text{ΟΑ}}=\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΡΠ}_1}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{f(x)-x}=\frac{1}{x}$ (1)

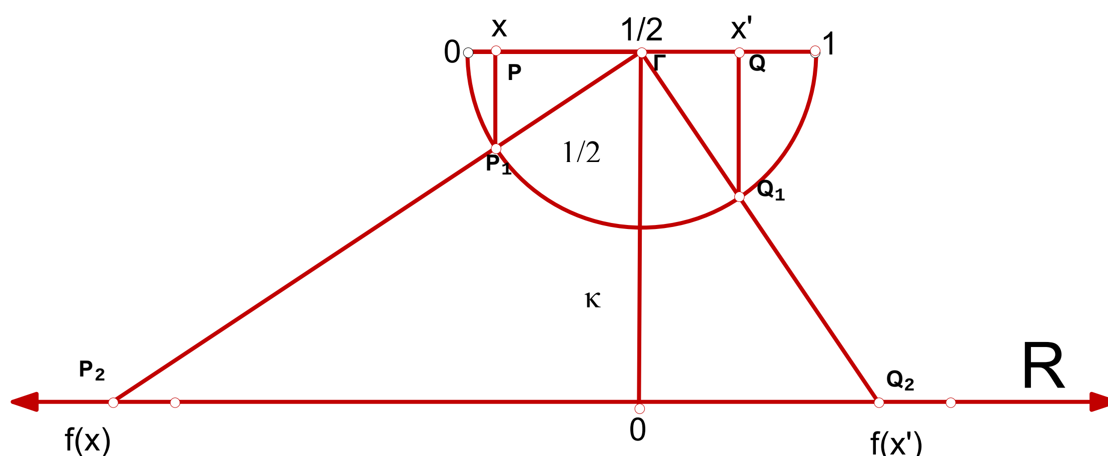
Από την (1) τελικά παίρνουμε ότι $f(x)=\frac{x}{1-x}$ της οποίας αν θεωρήσουμε πεδίο ορισμού το $[0,1)$ έχει πεδίο τιμών το $[0,+\infty)$ και είναι «1-1» και επί.

Η δικαιολόγηση της αμφιμονοσήμαντης αντιστοίχισης μπορεί να γίνει είτε με γεωμετρική ορολογία , είτε με σύγχρονη των συναρτήσεων. Όμως το σημαντικό είναι

[27] Το σχήμα αυτό υπάρχει στο αξιόλογο βιβλίο του Morris Kline «Τα Μαθηματικά στον Δυτικό Πολιτισμό» Τ.Β΄ εκδόσεις «Κώδικας» σελ. 259

ότι η εποπτεία του γεωμετρικού προτύπου υποβάλει την ανακάλυψη της $f:[0,1)\to[0,+\infty)$ που είναι «1-1» και επί.

Στο παρακάτω γεωμετρικό πρότυπο έχω την αντιστοίχιση των σημείων του (0,1) στο R . Το ½ απεικονίζεται στο 0 , το χ΄ που ανήκει στο (½ , 1) απεικονίζεται στον θετικό f(χ΄) , όπως και το χ που ανήκει στο (0, ½) απεικονίζεται στον αρνητικό f(χ) .



Από την ομοιότητα στα δύο εμφαινόμενα ζεύγη ορθογωνίων τριγώνων του σχήματος και με εφαρμογή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος , έχω:

$$\frac{f(x')}{\frac{1}{2}+\kappa}=\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-(x-\frac{1}{2})^2}} \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{f(x)}{\frac{1}{2}+\kappa}=\frac{\frac{1}{2}-x}{\sqrt{(\frac{1}{2}-x)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \quad (2)$$

Από (1) και (2) επάγεται η κατασκευή της $f:(0,1)\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ f(x)=\dfrac{(\frac{1}{2}+k)\,|(\frac{1}{2}-x)|}{\sqrt{-x^2+x}}$ με $\kappa\geq 0$. Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι η f είναι «1-1» και επί του R.

Ένα γνωστότερο και κοινής χρήσεως αποτέλεσμα που έχομε σήμερα είναι η συνάρτηση εφαπτομένη $f:(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}\ \ \mu\varepsilon\ f(x)=\varepsilon\phi x$ η οποία είναι «1-1» και επί του R. Η συνάρτηση εφχ , υπάρχει στο ίδιο πρότυπο του σχήματος,

αρκεί να το φανταστούμε με κ=0 σε στροφή 90^o και αντί του (0,1), το (-π/2 ,π/2) .

6.7. Ένα τετράγωνο έχει ίσο αριθμό σημείων με ένα ευθύγραμμο τμήμα!

Το 1877 ο Cantor , απέδειξε ότι το τετράγωνο [0,1]x[0,1] είναι ισοδύναμο με το [0,1].

Παρ΄ ότι ο Cantor είχε αποδείξει αυτό το αποτέλεσμα , ήταν απροετοίμαστος να το αποδεχθεί. Αυτό μπορεί σήμερα να μας προκαλεί έκπληξη, αλλά θα πρέπει να γνωρίζουμε το κλίμα της εποχής που ήταν πάρα πολύ εχθρικό για τον Cantor . Ακόμα και σήμερα υπάρχουν κριτικές και αντιρρήσεις για την θεωρία των απειροσυνόλων του Cantor και όχι μόνο για τα παράδοξα που δημιούργησε. Εκείνη την εποχή ο Poincare τα χαρακτήρισε «αρρώστια» από την οποία μια μέρα τα μαθηματικά θα θεραπευθούν.

Ο μεγαλύτερος εχθρός όμως του Cantor υπήρξε ο δάσκαλός του ο Leopold Kronecker , ο οποίος ήταν εκπρόσωπος του τότε Γερμανικού επιστημονικού κατεστημένου και έφθασε στο σημείο να χαρακτηρίζει τον Cantor με φράσεις όπως: «επιστημονικός τσαρλατάνος» «αποστάτης» και «διαφθορέας της νεολαίας» Αυτή η πρωτοφανής πολεμική που δέχθηκε ίσως να βάρυνε στο να αποβιώσει ο Cantor σε ένα ψυχιατρείο το 1918 . Προηγουμένως έστω και για λίγο ευτύχησε να δει την δικαίωση της θεωρίας του, αφού με αυτήν το 1901 εμπλούτισε ο Lebesgue την νεότατη τότε θεωρία μέτρου . Η όλη διαμάχη είχε αιτία την αποδοχή του απείρου από μέρους του Cantor ως ολοκληρωμένης και τελειωμένης οντότητας , πράγμα που θεωρείτο για άλλους μαθηματικούς όπως είδαμε εντελώς απαράδεκτο. Η αλήθεια είναι ότι η θεωρία των υπερπεπερασμένων αριθμών οδήγησε σε παράδοξα όπως του Russell του Burali Forti[28] τα οποία ξεκαθάρισαν λίγες δεκαετίες μετά , χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι τα πάντα έγιναν αποδεκτά από όλους. Η συνέχεια της διαμάχης των Cantor –Kronecker έγινε στον 20^o αιώνα σε άλλο επίπεδο όμως , μεταξύ

[28] Η θεωρία των υπερπεπερασμένων αριθμών και τα παράδοξα των Russel , Burali Forti κ.ά. , εκφεύγει των πλαισίων της παρούσης εργασίας. Επειδή όμως παρουσιάζουν ενδιαφέρον συστήνουμε στον αναγνώστη ένα προσιτό βιβλίο , όπως είναι η «Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών» του Διονυσίου Α. Αναπολιτάνου εκδόσεις ΝΕΦΕΛΗ 1986 καθώς και του βιβλίου του Rudy Rucker «Το άπειρο κι ο Νους» -Παν. Εκδόσεις Κρήτης 1999 , με την αναγκαία επισήμανση ότι το δεύτερο βιβλίο είναι σαφώς πιο δύσκολο από το πρώτο.

των Hilbert που υπήρξε ο κύριος εκπρόσωπος του φορμαλισμού και Brower ιδρυτή και εκπροσώπου του ενορατισμού ή ιντουσιονισμού[29] .

Ας δούμε όμως την ευφυή σύλληψη του Cantor για την αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα σημεία ευθ. τμήματος και τετραγώνου. η οποία τον είχε απασχολήσει για τρία χρόνια και συγκεκριμένα ανάμεσα στο 1871 και 1874 . Τα χρόνια περνούσαν και το ποθητό αποτέλεσμα δεν ερχόταν. Ξαφνικά όμως συνέβη το απροσδόκητο και κατορθώθηκε να ορισθεί μια συνάρτηση που ακόμα κι ο ίδιος θεωρούσε αδύνατη! Απευθυνόμενος στον Dedekind έγραψε: «Το βλέπω , αλλά δεν το πιστεύω!»

Ας σκιαγραφήσουμε την απόδειξη:

Αν ένα σημείο Α ανήκει στο τετράγωνο [0,1]x[0,1] , τότε θα έχει συντεταγμένες της μορφής Α(x,y) με $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 .....a_n ..... \textit{και } y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \beta_5 .....\beta_n ....$ όπου $α_i$ και $β_i$ τα ψηφία των x, y στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα.

Έχομε ήδη αναφέρει, ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού δεν είναι μοναδικό. Για να εξασφαλίσουμε την μοναδικότητα, απαιτούμε, οι συντεταγμένες όταν περιέχουν δεκαδικούς τερματιζόμενους, να τίθενται με την μορφή δεκαδικού περιοδικού με περίοδο το 9 . π.χ. ο 0,12340000000…….να τίθεται στην ισοδύναμη μορφή του 0,1233999999……

Στη συνέχεια χωρίζουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα του χ σε ομάδες ψηφίων σύμφωνα με τον εξής κανόνα: Αν το $α_1$ είναι διάφορο του μηδενός το θεωρούμε ως μονομελή ομάδα. Αν όμως είναι μηδέν συνεχίζουμε μέχρι να βρούμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο και κάνουμε εκεί τον διαχωρισμό. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον όπως και για το y .

Στη συνέχεια, σχηματίζουμε μια νέα ακολουθία ψηφίων με το να πάρουμε την πρώτη ομάδα του χ δίπλα την πρώτη ομάδα του y , την δεύτερη ομάδα του x δίπλα στην δεύτερη ομάδα του y , την τρίτη ομάδα του x , δίπλα στην τρίτη ομάδα του y. κ.ο.κ. επ΄ άπειρον. Σχηματίζεται έτσι ένας νέος αριθμός z που ανήκει στο [0,1]και έτσι ορίζουμε την απεικόνιση του τυχόντος (χ,y)$\in [0,1]x[0,1]$ στο z$\in [0,1]$.

[29] Για λεπτομέρειες στο ζήτημα αυτό βλέπε «Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών» του Διονυσίου Α. Αναπολιτάνου- εκδόσεις ΝΕΦΕΛΗ Σελ . 241-299

Για να γίνει πλήρως κατανοητό δίνουμε ένα παράδειγμα διαχωρισμού για το x και y και σχηματισμού του z :

Ανx=0,1002450600000089501111…και y=0,90000101200984031234…χωρίζω τα ψηφία του ως εξής:

x=**[0,1][002][4][5][06][00008][9][5][01][1][1][1]……**

y =[0,9][00001][01][2][009][8][4][03][1][2][3][4]…….οπότε θα έχω το

z=[01][09][002][00001][4][01][5][2][06][009][00008][8][9][4][5][03][01][1][1][2][1][3][1][4]………

Είναι φανερό , ότι διαφορετικά σημεία στο τετράγωνο,(χ,y) και (χ΄, y΄) αντιστοιχούν σε συντεταγμένες όπου διαφέρουν σε τουλάχιστον ένα ψηφίο τουλάχιστον μιας. Αυτό οδηγεί σε διαφορετικές εικόνες για τις αντίστοιχες εικόνες z και z΄. Άρα η ορισθείσα σχέση, είναι όντως απεικόνιση. Αντιστρόφως, διαφορετικές εικόνες για τα z και z΄, συνεπάγονται διαφορά σε ένα τουλάχιστον ομαδοποιημένο τμήμα , πράγμα που συνεπάγεται διαφορά σε μία τουλάχιστον συντεταγμένη, πράγμα που οδηγεί σε διαφορετικά σημεία. Έτσι η ορισθείσα απεικόνιση, είναι και «1-1» ενώ προφανώς είναι και επί του [0,1].

Από την παραπάνω απόδειξη, φαίνεται ότι πολύ εύκολα μπορεί να γίνει γενίκευση και για κύβο ή υπερκύβο . Γενικά αποδεικνύεται , ότι κάθε γεωμετρικό σχήμα οποιασδήποτε διάστασης, που περιέχει ένα τουλάχιστον ευθ. τμήμα, έχει τόσα σημεία, όσα και το ευθ. τμήμα.

6.8. Υπάρχει σύνολο με τον μέγιστο πληθικό αριθμό;

Μέχρι στιγμής έχομε αποδείξει ότι το (0,1) έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό και από το $\mathbb{N}$ και από το $\mathbb{Q}$, ενώ έχει ίσο πληθικό αριθμό με τα σημεία μιας ημιευθείας, μιας ευθείας, ενός τετραγώνου αλλά και οποιουδήποτε υπερκύβου με οιαδήποτε διάσταση.

Τον Cantor τον απασχόλησε κατά πόσον υπάρχει μέγιστος πληθικός αριθμός συνόλου. Ιδίως το τελευταίο αποτέλεσμα με τον υπερκύβο, μας υποβάλλει την ιδέα ότι ο πληθάριθμος του συνεχούς είναι ο μέγιστος, πράγμα που όμως δεν συμβαίνει!

Το σημαντικό αποτέλεσμα στο οποίο έφθασε ο Cantor λέει ότι κάθε σύνολο έχει μικρότερο πληθικό αριθμό από το δυναμοσύνολό[30] του. Αυτό για τα πεπερασμένα σύνολα είναι προφανές και τετριμμένο , αλλά για τα απειροσύνολα χρειάζεται απόδειξη που την επινόησε ο Cantor:

«Για κάθε σύνολο Α, ισχύει |Α|< $\mathcal{P}$(Α)» (1)

Για να αποδειχθεί η (1) πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του Α μέσα στο $\mathcal{P}$(Α) , αλλά δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του $\mathcal{P}$(Α) στο Α (ή –το αυτό- δεν υπάρχει απεικόνιση του Α στο $\mathcal{P}$(Α) που να είναι επί) . Το πρώτο είναι απλό να αποδειχθεί , αρκεί να θεωρήσουμε την απεικόνιση $\phi : \phi(x) = \{x\}$, η οποία απεικονίζει το στοιχείο x του Α στο μονοσύνολο {x} του $\mathcal{P}$(Α).

Το δεύτερο θα αποδειχθεί με την εις άτοπον απαγωγή.

Έστω ότι υπάρχει $f : A \to \mathrm{P}(A)$ που είναι επί . Θεωρούμε το σύνολο $X = \{x : x \in A \wedge x \notin f(X)\}$ επειδή η f είναι επί, έπεται ότι υπάρχει $a \in A$, ώστε X=f(α) . Αν α$\in X$, από τον ορισμό του Χ , έπεται ότι $\alpha \notin f(\alpha) = \mathrm{X}$.

Αναλόγως, αν $\alpha \notin \mathrm{X} = f(\alpha)$, από τον ορισμό του Χ , έχουμε ότι $\alpha \in \mathrm{X}$.

Έτσι έχουμε $\alpha \in \mathrm{X} \Leftrightarrow \alpha \notin \mathrm{X}$ που είναι άτοπο. Επομένως δεν υπάρχει $f : A \to \mathrm{P}(A)$ που είναι επί.

6.9. Το σύνολο $\mathrm{B} = \{\text{συναρτηση } \mathbf{f} \text{ με } \mathbf{f : (0,1) \to \{0,1\}}\}$ έχει περισσότερα στοιχεία από το σύνολο Α= (0,1)

Σε κάθε $\alpha \in (0,1)$, κατασκευάζουμε και αντιστοιχίζουμε την συνάρτηση $f_\alpha(\chi) = \begin{Bmatrix} 1 \ , \ \chi = \alpha \\ 0 \ , \ \chi \neq \alpha \end{Bmatrix} \in \mathrm{B}$,

Η αντιστοιχία αυτή είναι καλώς ορισμένη, αφού $\alpha = \beta \Rightarrow f_\alpha(\chi) = f_\beta(\chi)$ και επίσης είναι αμφιμονοσήμαντη **του Α μέσα στο Β** ,

[30] Υπενθυμίζουμε, ότι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου Α είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του και συμβολίζεται με $\mathcal{P}$(Α)

διότι $f_\alpha(\chi) = f_\beta(\chi) \Rightarrow \alpha = \beta$. Αυτό σημαίνει , ότι το Β δεν έχει λιγότερα στοιχεία από το Α .

Για να δείξουμε ότι το Β έχει περισσότερα στοιχεία από το Α, πρέπει κι αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία **του Β μέσα στο Α** . Θα εργασθούμε με την εις άτοπον απαγωγή:

Έστω ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του Β μέσα στο Α. Τότε το στοιχείο –συνάρτηση που ανήκει στο Β και αντιστοιχίζεται στο $\alpha \in A$, το συμβολίζουμε με $f_a(x)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi(\chi) = 1 - f_x(\chi)$ (*)

Η τιμή της φ(χ) σε κάποιο σημείο $\alpha \in \mathrm{A}$ ορίζεται ως εξής: Βρίσκουμε την συνάρτηση $f_\alpha(\chi)$ που αντιστοιχίζεται στο α , βρίσκουμε το $f_\alpha(\alpha)$ που είναι μια τιμή ή 0 ή 1 και αφαιρούμε από το 1 . Προφανώς εκ κατασκευής $\phi(\chi) \in \mathrm{B}$. Επομένως υπάρχει κάποιο β $\in \mathrm{A}$ και $f_\beta(\chi) \in \mathrm{B}$ για την οποία ισχύει:

$$\phi(\chi) = f_\beta(\chi) \qquad (**)$$

Από (*)&(**) έχω ότι

$1 - f_x(\chi) = f_\beta(\chi)$, $\forall \chi \in \mathrm{A}$ (***)

Η (***) για χ=β δίνει

$$1 - f_\beta(\beta) = f_\beta(\chi) \Rightarrow$$
$$2 f_\beta(\beta) = 1 \Rightarrow$$
$$f_\beta(\beta) = \frac{1}{2}$$

που είναι άτοπο διότι το πεδίο τιμών όλων των συναρτήσεων είναι το $\{0,1\}$

Επομένως δεν υπάρχει τέτοια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία , άρα το Β έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό από το Α=(0,1).

Αν προσέξουμε την απόδειξη, βλέπουμε ότι στην κατασκευή της φ(χ) εμφανίζεται η διαγώνια διαδικασία του Cantor .

6.10. Το παράδοξο του Cantor

Η αποδειχθείσα πρόταση (1) , μας εξασφαλίζει επαγωγικά μια ατελείωτη τάξη απείρων, αφού π.χ. το δυναμοσύνολο του (0,1) το $\mathcal{P}((0,1))$ έχει μεγαλύτερο

πληθικό αριθμό από το (0,1) ,το δυναμοσύνολο του δυναμοσυνόλου του (0,1) ακόμα μεγαλύτερη τάξη απείρου κ.ο.κ. Έτσι όμως φθάνουμε και σε ένα διάσημο παράδοξο που συνετάραξε τον Μαθηματικό κόσμο:

Έστω το Α το σύνολο όλων των συνόλων . Προφανώς έχει τον μέγιστο πληθικό αριθμό. Όμως από την πρόταση του Cantor , το δυναμοσύνολο του Α , έχει μεγαλύτερο πληθικό αριθμό. Έτσι το Α έχει και δεν έχει τον μέγιστο πληθικό αριθμό πράγμα αντιφατικό. Τι φταίει άραγε;

Ο Russell προέτεινε την απαγόρευση των αυτοαναφορών[31] του τύπου, $x \in x \; \kappa\alpha\iota \; \neg x \in x$ πράγμα που αν γινόταν αποδεκτό θα ήρε τα διάφορα συνολοθεωρητικά παράδοξα , αλλά θα περιόριζε τα ίδια τα μαθηματικά. Τελικά η αξιωματική θεμελίωση των Συνόλων από τους Zermelo –Fraenkel ήρε αφ΄ εαυτής τα παράδοξα μιας και πλέον δεν είχαν νόημα στη νέα θεμελίωση.

7. Οι «παθολογικές συναρτήσεις»

Ο ορισμός και η εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης , πέρασε από αρκετές φάσεις μέχρι να παγιωθεί στον σημερινό .

Ο Euler πίστευε ότι η συνάρτηση εκφράζεται με μια οποιαδήποτε καμπύλη που γράφεται με ελεύθερο χέρι[32]. Σήμερα γνωρίζουμε άπειρο αριθμό αντιπαραδειγμάτων συναρτήσεων στον ορισμό του Euler που όχι μόνο δεν μπορούν να σχεδιασθούν με ελεύθερο χέρι, αλλά αυτό δεν μπορεί να το κάνει ούτε ο τελειότερος υπολογιστής που διαθέτουμε ή και θα διαθέτουμε σε οποιοδήποτε απώτατο μέλλον. Πριν όμως φθάσουμε όμως στον σημερινό ορισμό της συνάρτησης, μια συνάρτηση με κλάδους θεωρείτο ως δύο συναρτήσεις ξέχωρες ή έστω «συρραμμένες» . Ακόμα οι μαθηματικοί τον 18$^{\text{ο}}$ αιώνα πίστευαν ότι μια συνάρτηση πρέπει να έχει μοναδική αναλυτική έκφραση. Αυτό εκ πρώτης όψεως ίσως δεν φαίνεται να δημιουργεί προβλήματα, αλλά ουσιαστικά αυτή ήταν η αιτία της διαμάχης από την επίλυση του προβλήματος της παλλομένης χορδής από τον D. Bernoulli και από τον D`

---

[31] Για λεπτομέρειες επί του θέματος βλέπε στην «Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών» του Διονυσίου Α. Αναπολιτάνου σελ. 211-215.

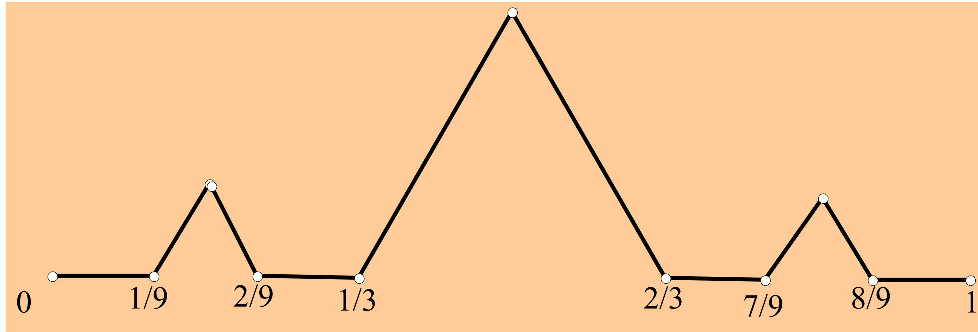
[32] Στα Λατινικά έγραφε: «Curva quancunque libero manus» όπως αναφέρει ο Dirk J. Struik στην «Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών»

Alembert. Και οι δύο είχαν καταλήξει σε λύση, μόνο που οι λύσεις τους εδίδεντο από διαφορετικούς τύπους . Η οξύτατη διαμάχη η οποία άρχισε εξ αιτίας αυτού του γεγονότος και στην οποία ενεπλάκη ο Euler , δεν έδωσε καμία διευκρίνιση στο θέμα. Οριστική απάντηση έδωσε ο Fourier τον επόμενο αιώνα , όταν έδειξε, ότι το άθροισμα μιας σειράς τριγωνομετρικών συναρτήσεων, μπορεί να εκφραστεί με διαφορετικούς τύπους σε διαφορετικά διαστήματα. Τότε έδωσε και έναν ορισμό για την συνάρτηση που υπογράμμιζε ότι το ουσιαστικό ζήτημα ήταν ο καθορισμός των τιμών της και όχι ο τύπος της. Το εμπόδιο όμως που είχε να ξεπεράσει η μαθηματική κοινότητα, ήταν ότι οι συναρτήσεις ήσαν μοντέλα που περιέγραφαν φυσικά φαινόμενα. Τέτοιες συναρτήσεις ήσαν οι συνεχείς ή οι κατά τμήματα συνεχείς. Η συνάρτηση του Dirichlet ή η συνάρτηση πρόσημο του χ sgn(x) $= \left\{ \begin{matrix} -1 \ , \ x < 0 \\ 0 \ \ , \ x = 0 \\ 1 \ \ , \ x < 0 \end{matrix} \right\}$ δεν θα μπορούσαν να μελετηθούν από κανένα μαθηματικό του $18^{ου}$ αιώνα. Την συνάρτηση πρόσημο θα την ανεγνώριζαν ως ένα εξιδανικευμένο μοντέλο ενός φαινομένου που αυξάνει απότομα σε μια περιοχή του μηδενός , ενώ την συνάρτηση του Dirichlet ως εντελώς άχρηστο μοντέλο για να περιγράψει οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο, αφού τα λάθη των μετρήσεων, οσοδήποτε μικρά και να είναι δεν μπορούν να εξασφαλίσουν το ρητόν ή άρρητον ενός μεγέθους.

Ο Henry Poincarè στο τέλος του $19^{ου}$ αιώνα απογοητευμένος έλεγε: «Υπήρξε εποχή που η έρευνα για νέες συναρτήσεις είχε ως κίνητρο κάποιον πρακτικό σκοπό. Σήμερα επινοούνται συναρτήσεις , μόνο και μόνο για να καταδειχθούν ψεγάδια στα επιχειρήματα των προγενεστέρων μας .Πέραν τούτου, δεν εξάγεται κανένα άλλο συμπέρασμα από τις εν λόγω συναρτήσεις.» Βεβαίως ο Poincarè δεν θα μπορούσε να φανταστεί ότι η σύγχρονη κβαντική φυσική ή θεωρία του χάους μελετά συναρτήσεις και καμπύλες με πολύ παράξενες ιδιότητες. Μάλιστα σήμερα γνωρίζουμε συναρτήσεις και καμπύλες με εξαιρετικά «παράξενες» ιδιότητες που εκφεύγουν από τα συνήθη Γεωμετρικά και διαισθητικά πρότυπα . Ας δούμε μερικά :

7.1.Συνάρτηση που ορίζεται στο [0,1] και έχει άπειρα ακρότατα , κοντά σε κάθε σημείο ενός υπεραριθμησίμου υποσυνόλου του [0,1]

Η κατασκευή της συνάρτησης, έγκειται και στην ταυτόχρονη κατασκευή του συνόλου Cantor που είναι υπεραριθμήσιμο , ενώ θα γίνει με έναν εποπτικό τρόπο:



Φανταζόμαστε ότι πέφτει κατακόρυφα βροχή πάνω στο [0,1] . Το χωρίζουμε σε τρία ίσα κομμάτια και στο μεσαίο τμήμα στήνουμε μια σκηνή που σχηματίζει ισόπλευρο τρίγωνο. Έτσι «βρέχονται» τα δύο άκρα τμήματα , εκτός από το μεσαίο . Τα σημεία 1/3 και 2/3 θεωρούμε ότι «βρέχονται». Την ίδια διαδικασία επαναλαμβάνουμε και στα δύο άκρα τμήματα : Τα χωρίζουμε σε τρία ίσα κομμάτια και σκεπάζουμε το μεσαίο. Έτσι , στο δεύτερο βήμα έχω τέσσερα τμήματα και δύο νέες σκηνές , όπως φαίνεται στο ανωτέρω σχήμα. Στο τρίτο βήμα έχω οκτώ τμήματα και τέσσερις νέες σκηνές κ.ο.κ. Στο ν-οστό βήμα έχω 2^{ν} τμήματα και $2^{\nu-1}$ νέες σκηνές. Αυτή η διαδικασία θεωρούμε ότι συνεχίζεται επ΄ άπειρον και μας δίνει την ζητουμένη συνάρτηση. Ας δούμε ορισμένα λίαν ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά της:

Το μήκος των «στεγνών» της σημείων, εκ κατασκευής είναι :

$\Sigma = \frac{1}{3} + 2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2^3\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \ldots + 2^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \ldots$ το οποίο είναι άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου , με πρώτο όρο το $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ και λόγο $\omega = \frac{2}{3}$

Άρα $\Sigma = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1$. Δηλαδή το μήκος των «εστεγασμένων» σημείων είναι ίσο με το μήκος του αρχικού διαστήματος [0,1] . Αυτό εποπτικά μας οδηγεί στο

συμπέρασμα ότι στεγάσαμε όλα τα σημεία. Αλλά βεβαίως είπαμε ότι τα άκρα των τομών π.χ. $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$ με τον τρόπο κατασκευής είναι άπειρα και αριθμήσιμα ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Εκτός από αυτά τα «βρεχόμενα» αριθμήσιμα σημεία δεν φαίνονται να υπάρχουν άλλα. Η εποπτεία μας λέει ότι:

- το μήκος του πεδίου ορισμού [0,1] είναι 1 .
- Ήδη στεγάσαμε σημεία με μήκος 1 .
- Στα άκρα των διαστημάτων έχομε άπειρο αριθμήσιμο πλήθος «βρεχόμενων» ρητών που δεν έχουν μήκος .

Άρα δεν πρέπει να υπάρχουν άλλα «βρεχόμενα» σημεία

Το εξαιρετικά περίεργο είναι ότι υπάρχουν κι άλλα «βρεχόμενα»σημεία που είναι μάλιστα υπεραριθμήσιμα στο πλήθος. Επίσης, παρ΄ ότι μπορούν -ως υπεραριθμήσιμα- να τεθούν σε «1-1»και επί αντιστοιχία με το (0,1) , εν τούτοις δεν έχουν μήκος!

Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα απόδειξη για το προηγούμενο, η οποία απλοποιεί αρκετά πράγματα, αρκεί να θεωρήσουμε τους αριθμούς του [0,1] γραμμένους στο τριαδικό σύστημα αριθμήσεως. Την παραθέτουμε, αφού υπενθυμίσουμε στον αναγνώστη ότι:

- Στο τριαδικό σύστημα αρίθμησης, χρησιμοποιούμε μόνο τα ψηφία 0,1 και 2 για να γράψουμε όλους τους αριθμούς .
- Όταν τριχοτομούμε το [0,1] , στο πρώτο τρίτο οι αριθμοί έχουν την μορφή $0,0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\ldots..\alpha_i\ldots\ldots.$, όπου τα α_i είναι ψηφία 0, 1, ή 2 .
- Στο δεύτερο τρίτο, οι αριθμοί έχουν την μορφή $0,1\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\ldots..\alpha_i\ldots$
- Στο τρίτο τρίτο , οι αριθμοί έχουν την μορφή $0,2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\ldots..\alpha_i\ldots$

Στο πρώτο βήμα , στεγάζουμε τους αριθμούς που αρχίζουν με 0,1……και παραμένουν «βρεχόμενοι» οι αριθμοί

0,0…

0,2…

Στο δεύτερο βήμα , στεγάζουμε κάποιους (δεν μας ενδιαφέρουν προς το παρόν) και παραμένουν βρεχόμενοι οι αριθμοί της μορφής:

0,00…

0,02…

0,20…

0,22…

Στο τρίτο βήμα , παραμένουν βρεχόμενοι οι αριθμοί της μορφής:

0,000….

0,002…

0,020…

0,022…

0,200…

0,202…

0,220…

0,222…

Στο τέταρτο βήμα , παραμένουν βρεχόμενοι οι αριθμοί

0,0000…

0,0002…

0,0020…

0,0022…

0,0200…

0,0202…

0,0220…

0,0222…

0,2000…

0,2002…

0,2020…

0,2022…

0,2200…

0,2202…

0,2220…

0,2222…

Στο ν-οστό βήμα , θα έχω 2^{ν} αριθμούς και ισάριθμες ακολουθίες ψηφίων . Αν τις διατάξουμε όπως και προηγουμένως κατά σειρές και στήλες ιδίας τάξης ψηφίων , θα έχω:

Η πρώτη στήλη μετά την υποδιαστολή θα έχει $2^{ν-1}$ μηδενικά και $2^{ν-1}$ διπλά κατά σειρά, εναλλασσόμενα 1 φορά .

Η δεύτερη στήλη μετά την υποδιαστολή θα έχει θα έχει $2^{ν-2}$ μηδενικά και $2^{ν-2}$ διπλά , εναλλασσόμενα 2 φορές.

Η τρίτη στήλη μετά την υποδιαστολή, θα έχει $2^{ν-3}$ μηδενικά και $2^{ν-3}$ διπλά , εναλλασσόμενα 3 φορές

Η ν-οστή στήλη θα έχει $2^{ν-ν}=1$ μηδενικό και $2^{ν-ν}=1$ διπλό που θα εναλλάσσεται

ν- φορές.

Η διαδικασία αυτή δεν σταματά εδώ, αλλά συνεχίζεται επ΄άπειρον….

Επ ΄άπειρον λοιπόν, παραμένουν " βρεχόμενοι" οι αριθμοί που το τριαδικό τους μέρος αποτελείται από τα ψηφία 0 και 2 .

Θα δείξουμε ότι το πλήθος αυτών των αριθμών έχει τον πληθάριθμο του συνεχούς!

Έστω ότι όλοι οι αριθμοί που έχουν τριαδικό ανάπτυγμα με ψηφία 0 ή 2 είναι αριθμήσιμοι. Τότε θα γράφονται σε μια σειρά όπως παρακάτω:

$$
\begin{array}{lllllllll}
a_1 = & 0, & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & x_5^1 & x_6^1 \ldots \\
a_2 = & 0, & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 & x_6^2 \ldots \\
a_3 = & 0, & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 & x_6^3 \ldots \\
a_4 = & 0, & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 & x_6^4 \ldots \\
a_5 = & 0, & x_1^5 & x_2^5 & x_3^5 & x_4^5 & x_5^5 & x_6^5 \ldots \\
a_6 = & 0, & x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 & x_5^6 & x_6^6 \ldots \\
a_7 = & 0, & x_1^7 & x_2^7 & x_3^7 & x_4^7 & x_5^7 & x_6^7 \ldots \\
a_8 = & 0, & x_1^8 & x_2^8 & x_3^8 & x_4^8 & x_5^8 & x_6^8 \ldots \\
\ldots & \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots\ldots & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots & \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots\ldots & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Σχηματίζουμε τον αριθμό $β=β_1β_2β_3β_4β_5β_6β_7β_8….β_i……..$

Με τον εξής κανόνα δημιουργίας:

$\beta_i = \begin{cases} 2 \text{ , αν } \chi_i^i = 0 \\ 0 \text{ , αν } \chi_i^i = 2 \end{cases}$ Τότε ο αριθμός β δεν ανήκει σε αυτή την σειρά απαρίθμησης, πράγμα άτοπο . Επομένως δεν είναι αριθμήσιμοι οι τριαδικοί του [0,1] με ψηφία το 0 και το 2 , σύμφωνα με το παραπάνω διαγώνιο επιχείρημα.

Το «βρεχόμενο» τμήμα του [0,1] λέγεται Σύνολο του Cantor και έχει εξαιρετικά ενδιαφέρουσες αναλυτικές και τοπολογικές[33] ιδιότητες .



Η κατασκευή του συνόλου του Cantor , μέχρι το τέταρτο βήμα.

Έτσι όπως το έχουμε κατασκευάσει, προκύπτει, ότι οσοδήποτε κοντά σε κάθε σημείο του συνόλου Cantor υπάρχουν άπειρα τοπικά μέγιστα . Αυτό καθίσταται φανερό, αν αναλογισθούμε την τριαδική μορφή που έχουν οι θέσεις των τοπικών μεγίστων της συνάρτησης.

Εκ κατασκευής οι θέσεις αυτές είναι της μορφής:
$\gamma=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6\gamma_7\ldots\gamma_\nu 1$, όπου ν οσοδήποτε μεγάλος φυσικός και τα γ_i είναι ψηφία 0 ή 2 σε τριαδικό σύστημα αρίθμησης.

Έτσι, αν έχουμε ένα στοιχείο c του Συνόλου Cantor ,αυτό θα αποτελείται από ψηφία 0 ή 2 . Αν κατασκευάσουμε μια σφαιρική περιοχή με κέντρο το c και οσοδήποτε μικρή ακτίνα ρ, τότε υπάρχει μέγιστος ν φυσικός με $\rho>3^{-\nu}$(με βάση το δέκα ή $10^{-\nu}$με βάση το τρία)

Κατασκευάζω έναν νέο αριθμό κ_1 ως εξής: Διατηρώ το τριαδικό ανάπτυγμα της ακολουθίας των ψηφίων του c μέχρι το (ν+1)-οστό ψηφίο και στην συνέχεια το επόμενο ψηφίο αν είναι 0 το κάνω 1 ή αν είναι 2 το κάνω 1 . Έτσι παίρνω έναν αριθμό δεξιότερα ή αριστερότερα αντιστοίχως του c , που ανήκει στην S(c, ρ) .

Έπειτα λαμβάνουμε την ακολουθία των ψηφίων του c μέχρι και το (ν+2)-οστό και στην συνέχεια θέτουμε 1 , παίρνοντας έναν νέο αριθμό κ_2 που ανήκει στην S(c, ρ). Ορίζεται με αυτό τον τρόπο μια άπειρη ακολουθία θέσεων

---

[33] Για παράδειγμα , το σύνολο του Cantor είναι κλασμοειδές (ή μορφοκλασματικό αντικείμενο ή φράκταλ ή θρύμμα) έχει δηλαδή την ιδιότητα της αυτοομοιότητας έχει διάσταση- κατά Haousdorff- log2/log3 $\simeq 0,63092 < 1$ κ.ά.

τοπικών μεγίστων που ανήκουν σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του c δηλ. σε διάστημα της μορφής (c-ρ, c+ρ).

Από την κατασκευή της ακολουθίας γίνεται φανερό, ότι υπάρχουν δύο υπακολουθίες θέσεων μεγίστων, η μία δεξιά του c και η άλλη αριστερά του c , άρα έχω άπειρα ακρότατα και σε διαστήματα της μορφής (c, c+ρ) και (c-ρ, c) για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$.

7.2 Η συνάρτηση του Cantor («η κλίμαξ του διαβόλου») είναι μια συνάρτηση που είναι:

- **Συνεχής στο [0,1]**
- **Αύξουσα**
- **Μη σταθερά**
- **Παραγωγίσιμη παντού με παράγωγο ίση με 0 , εκτός από ένα υποσύνολο του [0,1] με μήκος 0.**

Ορίζεται μια κλιμακωτή συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ ως εξής:

Διαιρούμε το [0,1] σε τρία ίσα τμήματα και ορίζουμε την συνάρτηση να παίρνει την τιμή ½ σε κάθε σημείο του μεσαίου τμήματος. Κατόπιν, διαιρούμε το αριστερό και το δεξιό τμήμα πάλι σε τρία κομμάτια έκαστο και ορίζουμε την συνάρτηση να παίρνει την τιμή ¼ στο διάστημα $\left[\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right]$ και ¾ στο $\left[\frac{3}{4},\frac{7}{9}\right]$.

Έχουν απομείνει τέσσερα τμήματα στα οποία η συνάρτηση δεν έχει ακόμα ορισθεί:

$\left[0,\frac{1}{9}\right],\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right]$ Κάθε ένα από αυτά τα διαιρούμε σε τρία ίσα τμήματα και στα μεσαία τμήματα ορίζουμε την τιμή της συνάρτησης $\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}$ αντιστοίχως.

Αν συνεχίσουμε επ΄άπειρον αυτή την διαδικασία, προκύπτει μια συνάρτηση ορισμένη σε όλα τα «στεγνά» σημεία του [0,1] δηλ στο [0,1]\C , όπου C το σύνολο του Cantor.

Αν $f(\chi)=\lim_{n\to\infty} f(\chi_n)=\lim_{n\to\infty} f(\chi'_n)$ $x\in C$, τότε όπως έχουμε δείξει, το x έχει μια απειροψήφια τριαδική ανάπτυξη της μορφής $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6.....\alpha_\nu......$ όπου $\alpha_i\in\{0,2\}\ \forall i\in\mathbb{N}$.

Μπορούμε να ορίσουμε δύο ακολουθίες με στοιχεία του [0,1]\C , γνησίως μονότονες , μία $\{x_n\}$ γνησίως αύξουσα και μία $\{x'_n\}$ γνησίως φθίνουσα που να συγκλίνουν στο x. Ο τρόπος ορισμού π.χ για την $\{\chi_n\}$, μπορεί να γίνει ως εξής:

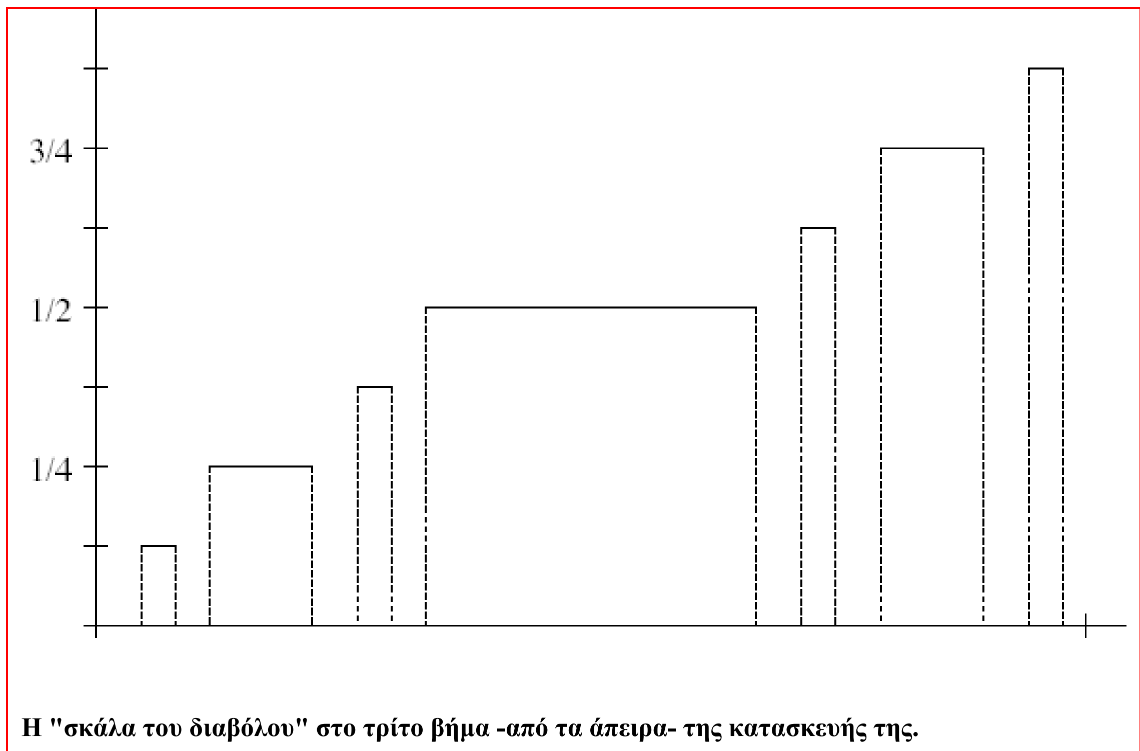
Αριθμώ το τριαδικό ανάπτυγμα του χ και το πρώτο 2 που θα συναντήσω το κάνω 1 . Σταματώ την αρίθμηση και τον αριθμό που έχει προκύψει τον ορίζω ως χ_1 . Αριθμώ τα ψηφία του χ και στο δεύτερο 2 που θα συναντήσω το κάνω 1 , σταματώ και ορίζω το χ_2 μέχρι εκεί. Συνεχίζω έτσι, αριθμώ πάλι και στο ν-οστό 2 που θα συναντήσω, θα το κάνω 1 και θα ορίσω τον χ_n . Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία στο [0,1]\C που εκ κατασκευής είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο χ.

Ο τρόπος ορισμού για την $\{\chi'_n\}$, μπορεί να γίνει ως εξής:

Αριθμώ το τριαδικό ανάπτυγμα του χ , και το πρώτο 0 που θα συναντήσω το κάνω 1 και ορίζω τον χ'_1. Αριθμώ και πάλι και το δεύτερο 0 που θα συναντήσω το κάνω 1 και ορίζω έτσι τον χ'_2. Συνεχίζω και αριθμώ και το ν-οστό 0 που θα συναντήσω το κάνω 1 και ορίζω έτσι τον χ'_n. Εκ κατασκευής η $\{\chi'_n\}$ είναι γνησίως φθίνουσα συγκλίνει στον χ και όλοι οι όροι της ανήκουν στο [0,1]\C.

Η τιμή της συνάρτησης του Cantor στο σημείο $\chi\in[0,1]\backslash C$ ορίζεται ως: $f(\chi)=\lim_{n\to\infty} f(\chi_n)=\lim_{n\to\infty} f(\chi'_n)$. Το ότι υπάρχουν αυτά τα όρια και είναι κοινά , μπορεί να αποδειχθεί , οπότε μετά η συνέχεια της f σε όλο το διάστημα [0,1] έπεται φυσιολογικά.

Εναλλακτικά μπορεί να ορισθεί : Αν $\chi\in C$, $f(\chi)=\sup\{f(u):u\in[0,1]\setminus C \text{ με } u<\chi\}$



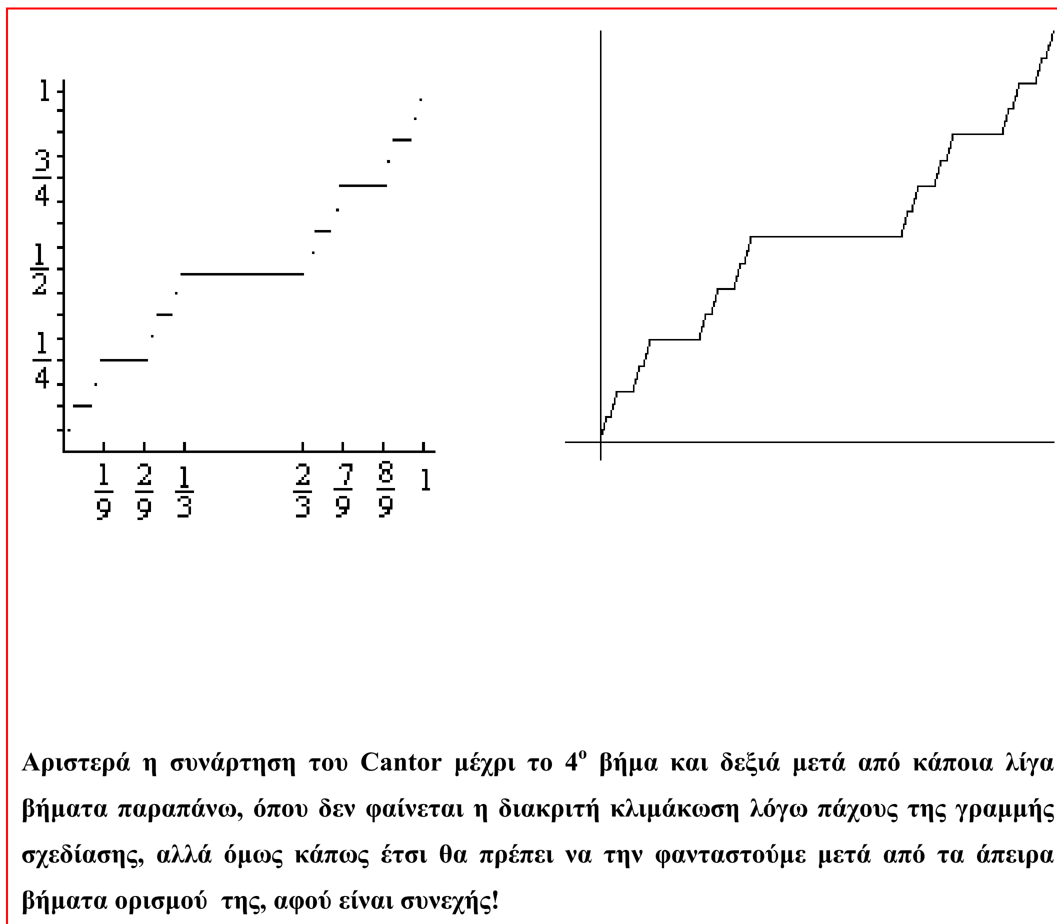
Η "σκάλα του διαβόλου" στο τρίτο βήμα -από τα άπειρα- της κατασκευής της.

Ένας άλλος έξυπνος αλγοριθμικός τρόπος ορισμού της τιμής f(χ) στην θέση χ, είναι ο εξής:

1. Γράψε το χ με την τριαδική του ανάπτυξη.
2. Αν το χ περιέχει το ψηφίο 1, άλλαξε το πρώτο 1 που θα συναντήσεις με 2 , και όλα τα ακόλουθα ψηφία με 0.
3. άλλαξε όλα τα ψηφία 2 , με 1
4. Την νέα γραφή του αριθμού , θεώρησέ την στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης και αυτή είναι η τιμή f(x).

Δηλαδή: Αν χ= $0,75217192501143118427069044352995_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ 10)}$ τότε με τον γνωστό αλγόριθμο των συνεχών διαιρέσεων με το 3 απ΄ όπου παίρνομε τα διαδοχικά υπόλοιπα κατ΄ αντίστροφη φορά, , έχω ότι χ=0, $2020221_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\ 3)}$ ή

$$\chi=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\frac{1}{3^7}$$



Αριστερά η συνάρτηση του Cantor μέχρι το 4ο βήμα και δεξιά μετά από κάποια λίγα βήματα παραπάνω, όπου δεν φαίνεται η διακριτή κλιμάκωση λόγω πάχους της γραμμής σχεδίασης, αλλά όμως κάπως έτσι θα πρέπει να την φανταστούμε μετά από τα άπειρα βήματα ορισμού της, αφού είναι συνεχής!

Τότε έχω f(x) =0,1010111$_{(βάση\ 2)}$ δηλ. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}$

Ο παραπάνω αλγόριθμος ουσιαστικά προέρχεται από τον εξής ορισμό:

Αν $\chi \in (\alpha,\beta)$ με $\alpha \equiv \frac{c_1}{3}+\ldots+\frac{c_{m-1}}{3^{m-1}}+\frac{1}{3^m}$ και $\beta \equiv \frac{c_1}{3}+\ldots+\frac{c_{m-1}}{3^{m-1}}+\frac{2}{3^m}$, και $c_i \in \{0,1,2\}$, τότε $f(\chi)\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2}+\ldots+\frac{c_{m-1}}{2^{m-1}}+\frac{2}{2^m}\right)$ με την προέκταση του ορισμού και όταν $m \to +\infty$ που οι ορισθείσες σειρές συγκλίνουν.

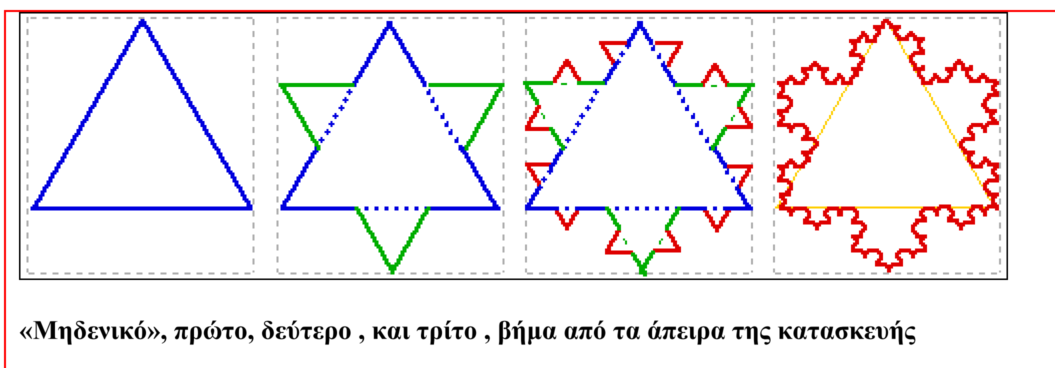
Να επισημανθεί ,ότι όπως ήδη έχουμε αποδείξει στην προηγούμενη εφαρμογή, το μήκος των σκαλοπατιών έχει μήκος 1, ακριβώς όσο και το μήκος του πεδίου ορισμού [0,1] . Στα σημεία του συνόλου Cantor , η οριζόμενη συνάρτηση κατορθώνει να γίνεται αύξουσα διατηρώντας την συνέχειά της, πράγμα που είναι καταπληκτικό αφού εκφεύγει σαφώς της συνήθους εποπτείας και διαίσθησης.

7.3. Μια κλειστή επίπεδη καμπύλη που περικλείει πεπερασμένο εμβαδόν και έχει άπειρη περίμετρο!

Πρόκειται για την γνωστή καμπύλη ή «Νιφάδα» του Koch , η οποία εκτός από τις ανωτέρω ιδιότητες , δεν επιδέχεται εφαπτομένη σε κανένα σημείο της , κάτι που δεν θα αποδείξουμε , αλλά το δείξουμε για μια συνάρτηση που έχει αυτή την ιδιότητα παρακάτω:

Η κατασκευή της γίνεται βήμα προς βήμα με τον εξής τρόπο:

Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους π.χ. 1. («μηδενικό» βήμα για την περίμετρο Π_0) Διαιρούμε κάθε πλευρά του τριγώνου σε τρία ίσα μέρη, αφαιρούμε τα τρία μεσαία μέρη και σε κάθε θέση τους προσθέτουμε ένα ισοσκελές «λάμδα» που με την αφαιρούμενη πλευρά σχηματίζει ισόπλευρο τρίγωνο. Έτσι, έχω το πρώτο βήμα που αντιστοιχεί σε περίμετρο Π_1. Αυτό συνεχίζεται επ΄ άπειρον και σχηματίζεται η καμπύλη. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το πρώτο δεύτερο τρίτο και τέταρτο βήμα



«Μηδενικό», πρώτο, δεύτερο , και τρίτο , βήμα από τα άπειρα της κατασκευής

Στο «μηδενικό» βήμα έναρξης έχει περίμετρο

$\Pi_0 = (3)\cdot(1)$

Στο πρώτο βήμα κατασκευής έχω στην κάθε πλευρά να δημιουργούνται 4 νέες πλευρές με μήκος το $\frac{1}{3}$ του προηγούμενου μήκους , δηλ.

$\Pi_1 = (4\cdot 3)\cdot(1\cdot\frac{1}{3}) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^1$

Στο δεύτερο βήμα , ομοίως σε κάθε πλευρά δημιουργούνται 4 νέες πλευρές με μήκος το $\frac{1}{3}$ του προηγούμενου μήκους , δηλ.

$\Pi_2 = \underbrace{4(4\cdot 3)}_{\text{πλευρες}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}(1\cdot\frac{1}{3})}_{\text{μηκος πλευρας}} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2$

Στο τρίτο βήμα , ομοίως έχω τετραπλασιασμό των πλευρών με υποτριπλασιασμό του μήκους δηλ τον συντελεστή $\frac{4}{3}$ και

$\Pi_3 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^3$ Τελικά επαγωγικά έχω $\frac{4}{3} > 1$ $\Pi_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n \to +\infty$, αφού $\frac{4}{3} > 1$.

Επομένως έχω άπειρη περίμετρο.

Για το εμβαδόν Ε, έχω τα εξής:

Το αρχικό τρίγωνο έχει εμβαδόν E_0.

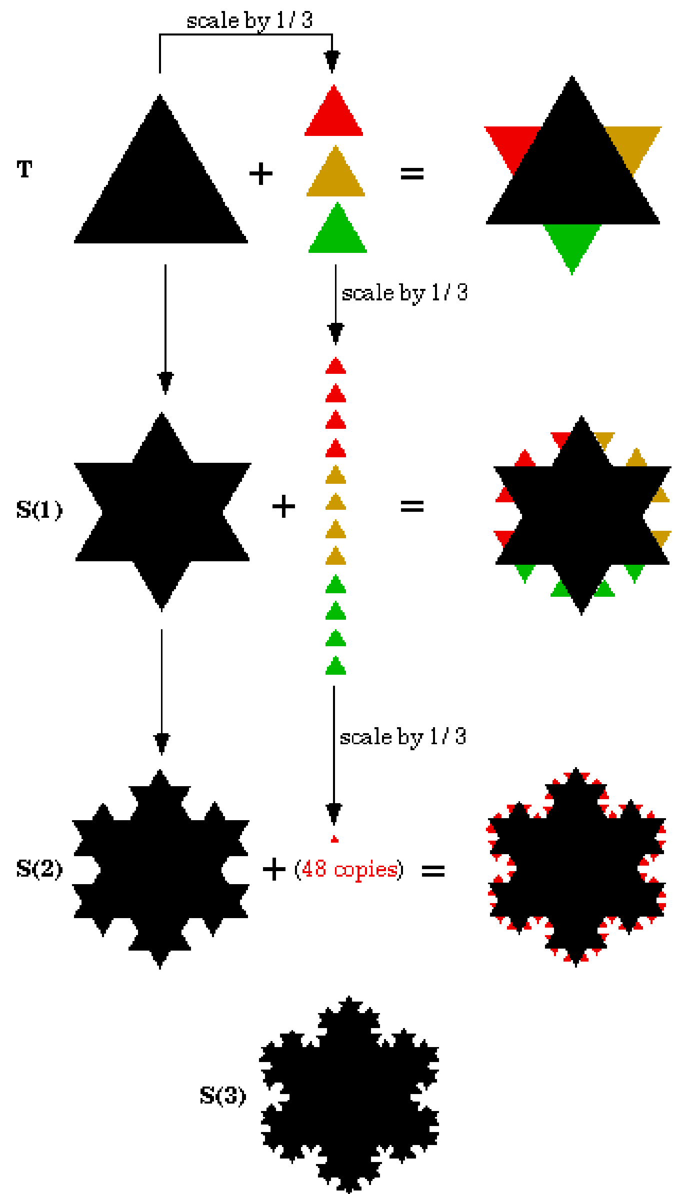
Στο πρώτο βήμα έχω εμβαδόν E_1 το οποίο προκύπτει από το E_0 αν το αυξήσουμε κατά 3 επί πλέον όμοια τρίγωνα που έκαστο έχει λόγο ομοιότητος με το E_0 $\frac{1}{3}$ και άρα λόγο εμβαδών $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ Άρα :

$$E_1 = E_0 + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot E_0 = E_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^0 E_0 \qquad (1)$$

Στο δεύτερο βήμα , έχω εμβαδόν E_2 . Αυτό προκύπτει, από το E_1 , όταν σε κάθε πλευρά του προστεθούν τετραπλάσια ισόπλευρα τριγωνάκια τα οποία έχουν λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ με σχέση το αρχικό E_0 και λόγο εμβαδών $\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)^2$.

Άρα $E_2 = E_1 + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\frac{1}{3}\right)^2 E_0 = E_1 + 3\cdot 4\left(\frac{1}{9}\right)^2 E_0 = E_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^1$ (2)

Επαγωγικά , με την ίδια κατασκευαστική λογική , έχω στο n+1 βήμα:



$$E_{n+1} = E_n + 3 \cdot 4^n \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right]^2 \cdot E_0 = \qquad \textbf{(3)}$$

$$E_n + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^n \cdot E_0$$

Η σχέση (3) , μας δίνει το εμβαδόν στο n+1 βήμα συναρτήσει του εμβαδού στο προηγούμενο βήμα n και του αρχικού εμβαδού E_0.

$$\cancel{E_0} = E_0$$

$$\cancel{E_1} = \cancel{E_0} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^0 E_0$$

$$\cancel{E_2} = \cancel{E_1} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^1 E_0$$

$$\cancel{E_3} = \cancel{E_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^2 E_0$$

$$\cancel{E_4} = \cancel{E_3} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^3 E_0$$

............/..................

../...........................

$$E_{n+1} = \cancel{E_n} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^n E_0$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, παίρνω:

$$E_{n+1} = E_0 + E_0 \cdot \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{9} \right)^k \Rightarrow$$

$$E_{n+1} = \left\{ 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{9} \right)^k \right\} \cdot E_0 \Rightarrow$$

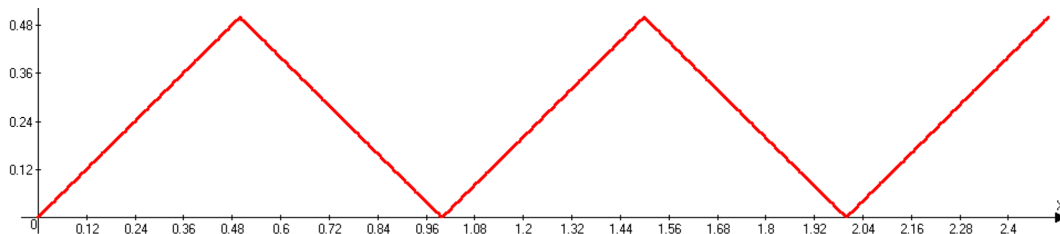
$$\lim_{n \to \infty} E_{n+1} = \left\{ 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^k \right\} \cdot E_0 \Rightarrow E_\infty = \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) E_0 \Rightarrow E_\infty = \frac{8}{5} E_0$$

Δηλ. Το επ΄ άπειρον σχήμα της νιφάδας του Koch έχει 60% παραπάνω εμβαδόν από το αρχικό τρίγωνο.

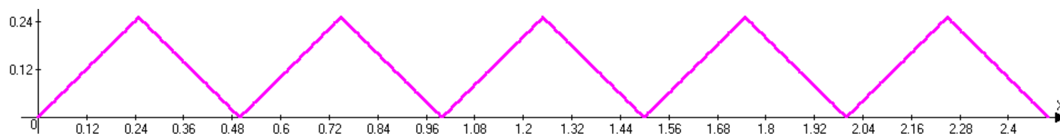
7.4.Αν φ(χ) είναι η συνάρτηση «απόσταση του χ από τον πλησιέστερο ακέραιο», Τότε η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\phi(10^n x)$ είναι <u>παντού συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη</u>!

<u>Προκαταρτικά-σκιαγράφηση της απόδειξης</u>: Η συνάρτηση φ(χ) ορίζεται μέσω της συνάρτησης «απόλυτη τιμή» «δεκαδικό μέρος αριθμού» δηλ. {χ} η οποία με την σειρά της ορίζεται μέσω της συνάρτησης «ακέραιο μέρος αριθμού» από την ισότητα {χ}=χ-[χ] , (βλ. Β3.6.Β.α) . Έτσι έχω:

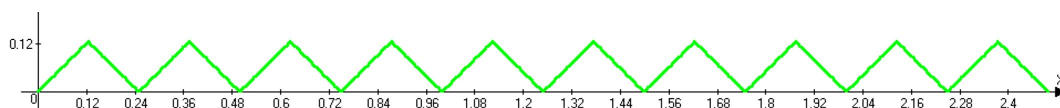
φ(χ)=$\left|-\frac{1}{2}+\left\{\chi-\frac{1}{2}\right\}\right|$ για την οποία προφανώς ισχύει $0\le\phi(\chi)\le\frac{1}{2}$, (1) και η οποία έχει την παρακάτω γραφική παράσταση :



Η συνάρτηση $\frac{1}{2}\phi(2\chi)$ έχει την παρακάτω γρ. παράσταση:



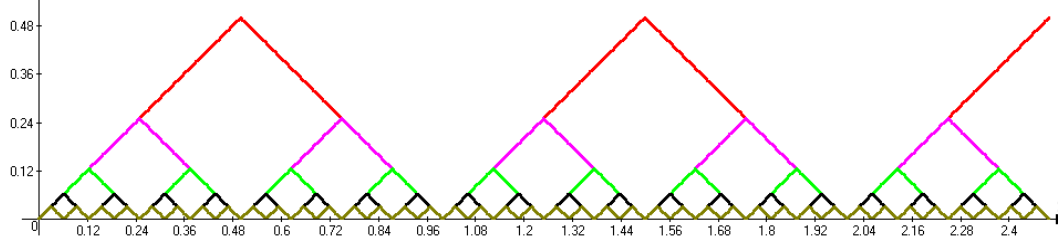
Η συνάρτηση $\frac{1}{4}\phi(4\chi)$ έχει την παρακάτω γρ. παράσταση:



Η συνάρτηση $\frac{1}{8}\phi(8\chi)$ έχει την παρακάτω γρ. παράσταση:

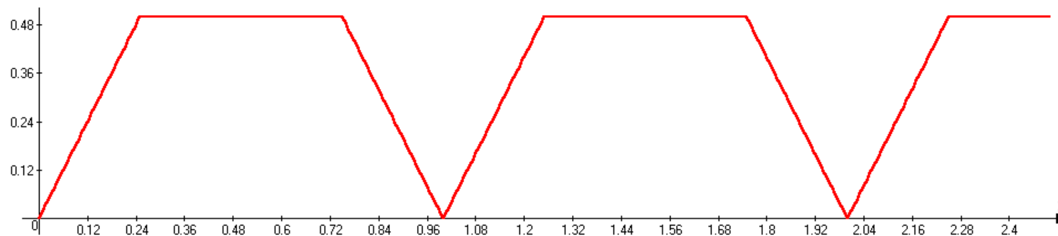


Σχεδιασμένες όλες σε ένα σύστημα αξόνων μαζί με την $\frac{1}{16}\phi(16\chi)$ έχουν την παρακάτω εικόνα:

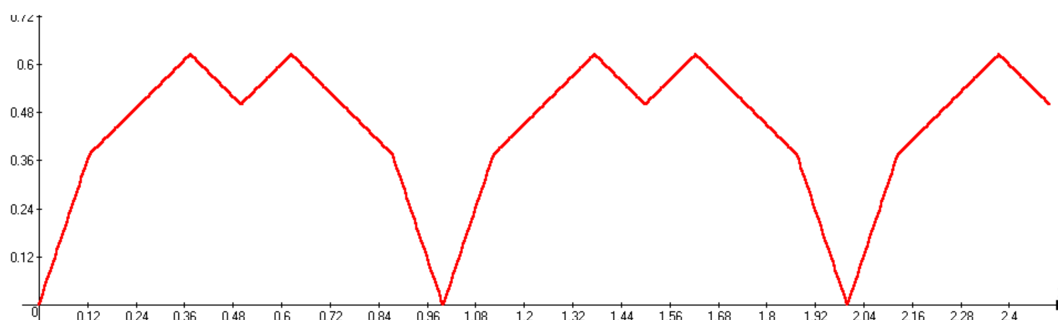


Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων οι οποίες έχουν και μια αξιόλογη ιδιότητα που δεν χρειάζεται στην απόδειξη , αλλά την αναφέρουμε: Σε κάθε υποδιάστημα [α,β] του R , όλες έχουν το ίδιο μήκος , κάτι που μπορεί να αποδειχθεί εύκολα γεωμετρικά , μέσω των παραλληλογράμμων που δημιουργούνται.

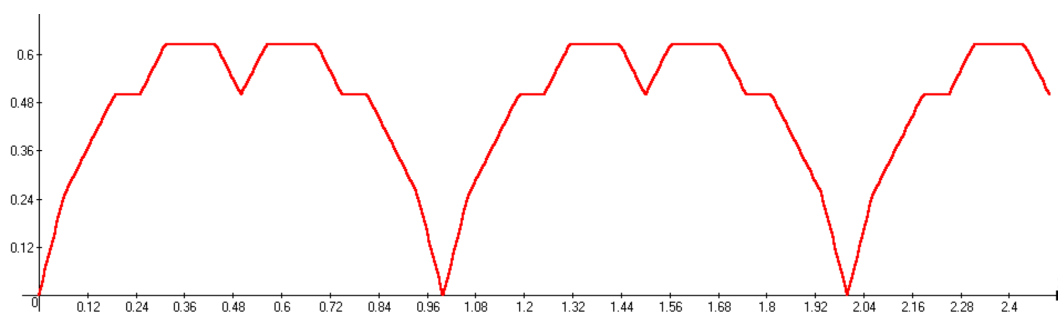
Αν προσθέσω την πρώτη και την δεύτερη , παίρνω μια συνάρτηση που έχει την παρακάτω μορφή:



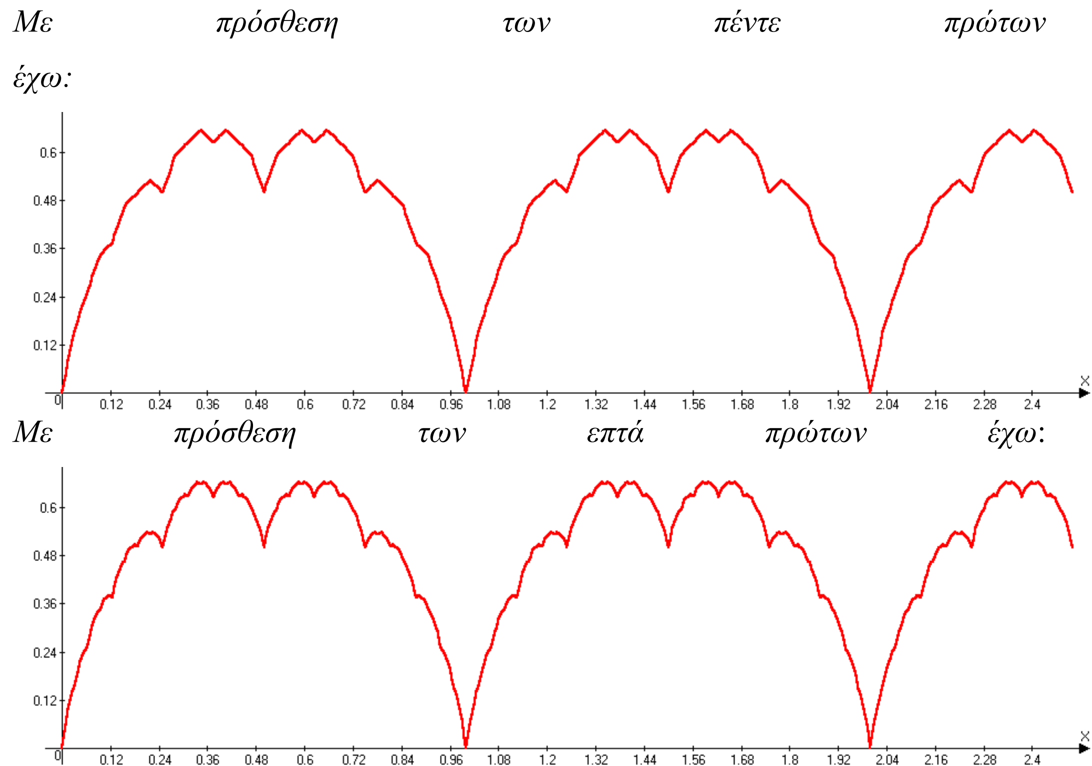
Αν προσθέσω τις τρεις πρώτες έχω:



Με πρόσθεση των τεσσάρων πρώτων έχω:



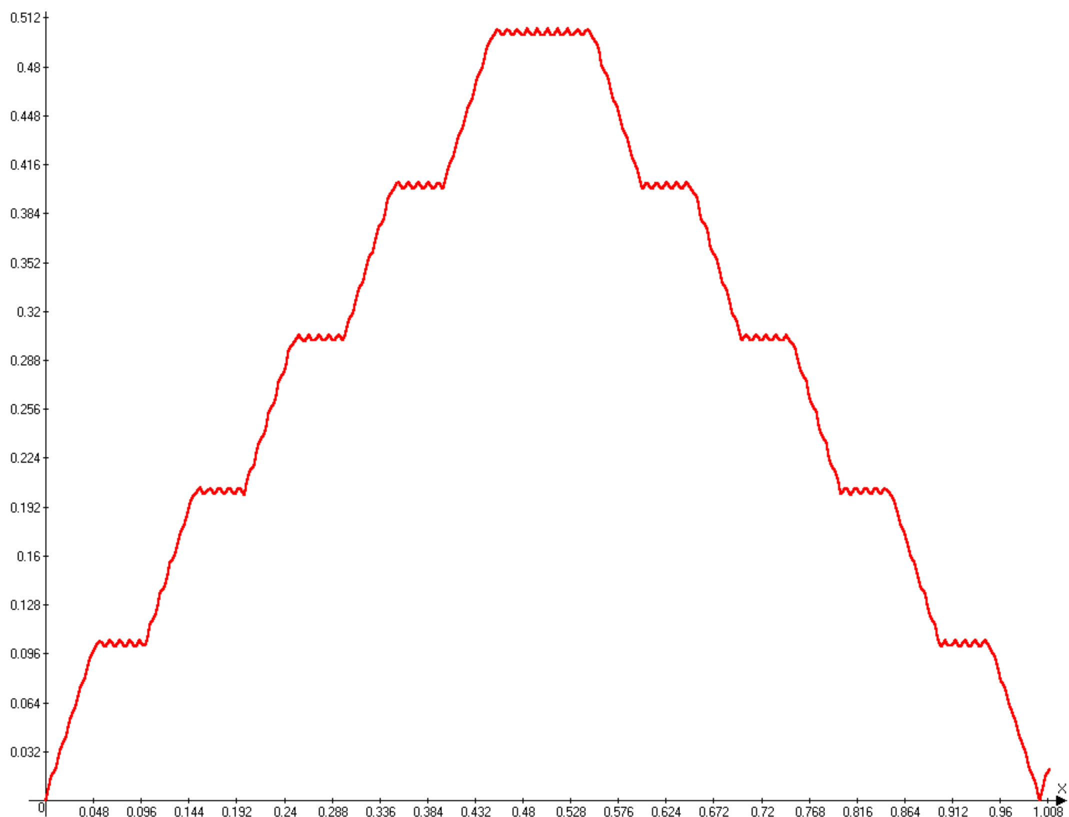
Με πρόσθεση των πέντε πρώτων έχω:



Με πρόσθεση των επτά πρώτων έχω:

Αν προσέξουμε καλύτερα βλέπουμε ότι παράγεται ένα σχήμα με την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας (το μέρος όμοιο με το όλον) είναι δηλαδή ένα μορφοκλασματικό αντικείμενο, ή κλασμοειδές . Επίσης πρέπει να προσέξουμε ότι στην πρώτη συνάρτηση έχω γωνιώδες σημείο στις θέσεις ½ +κ , $\kappa \in \mathbb{Z}$ όπου δεν υπάρχει εφαπτομένη στο διάγραμμα της συνάρτησης. Όταν προστεθούν και οι άλλες συναρτήσεις έχω πρόσθεση επί πλέον κλάσεων γωνιωδών σημείων , τα οποία με τον τρόπο που έχω ορίσει την φ(χ) ισοκατανέμονται στο R κάτι που είναι απαραίτητο για να γίνουν τόσο πολύ πυκνά μετά από άπειρα βήματα, έτσι ώστε σε κάθε σημείο χ_0 του R , να μην υπάρχει τελικά εφαπτόμενη στο διάγραμμα της f.

Στα προηγούμενα σχήματα επιλέξαμε την ακολουθία των συναρτήσεων $\frac{1}{2^{\nu}}\cdot\phi(2^{\nu}\cdot\chi)$ και όχι την $\frac{1}{10^{\nu}}\cdot\phi(10^{\nu}\cdot\chi)$ για λόγους καθαρά σχεδιαστικούς μιας και για ν=2 και μόνο για την πρώτη βασική περίοδο της αρχικής , έχω:



Για ν=3, 4, 5, …. Προστίθενται διαρκώς πολλαπλάσια δοντάκια από το προηγούμενο βήμα, τα οποία όμως δεν διαφοροποιούν το σχήμα που μου δίνει ο υπολογιστής, αφού έχω υπέρβαση της διακριτικής ικανότητας που καθορίζεται από το πλάτος της γραμμής σχεδίασης.

Διαισθητικά όμως καταλαβαίνουμε, ότι αν αυτό συνεχισθεί σε άπειρα βήματα η καμπύλη μου θα έχει άπειρα δοντάκια ισοκατανεμημένα ως άπειρα σε κάθε υποδιάστημα του R , οσοδήποτε μικρό , άρα το γράφημά της δεν θα επιδέχεται πουθενά εφαπτομένη.

Ορισμένα για την τεχνική της απόδειξης:

- Πρώτα θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\phi(10^n x)$ είναι συνεχής , με την βοήθεια του κριτηρίου του Weierstrass . Την έχουμε κατασκευάσει , ώστε να εφαρμόζεται το κριτήριο αμέσως.
- Θα επιλέξουμε ένα σημείο α στο R και θα δείξουμε ότι σε αυτό δεν υπάρχει παράγωγος.

- Παρατηρούμε, ότι η f , παρουσιάζει περιοδικότητα με πρωτεύουσα περίοδο T=1, συνεπώς θα εξετάσουμε την f μόνο στο (0,1] . Άρα θα επιλέξουνε $a \in (0,1]$
- Για να δείξουμε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της $\lim_{m\to\infty} \frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$ f στο α. , θα χρησιμοποιήσουμε όχι τον συνήθη ορισμό της παραγώγου ,αλλά τον ακολουθιακό που λέει ότι **για κάθε μηδενική ακολουθία h_m** θα πρέπει **να υπάρχουν** τα όρια $\lim_{m\to\infty} \frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$ **και να είναι όλα ίσα**.. (2)
- Θα κατασκευάσουμε **μια μηδενική ακολουθία h_m για την οποία το όριο της (1) δεν υπάρχει**. Επιλέξαμε μάλιστα την παράσταση των f_n με την παράσταση της δύναμης του 10 ώστε η ακολουθία που θα κατασκευαστεί να εκμεταλλευθεί την δεκαδική παράσταση του α και να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα που θέλουμε, δηλ. της μη ύπαρξης του ορίου της (2). Με αυτό τον τρόπο αντιμετωπίζεται το θέμα με στοιχειώδη (κατά το δυνατόν) τρόπο με χρήση μόνο του κριτηρίου του Weierstrass και μάλιστα για την απόδειξη της συνέχειας της f.
- **Το Μ-κριτήριο του Weierstrass:** έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων στο Α. Έστω επίσης μια ακολουθία αριθμών $\{M_n\}$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$|f(x_n)| \le M_n \quad , \forall x \in A.$, και ακόμα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει , και μάλιστα απολύτως και επίσης συγκλίνει ομοιόμορφα στο Α , στην συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Λεπτομερώς η απόδειξη έχει ως εξής:

1) Η συνέχεια της f(x)

Ορίζουμε ότι $f_n(x) = \frac{1}{10^n}\phi(10^n x)$, η οποία είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Τότε από (*) έχω προφανώς ότι $|f_n(x)| \leq \frac{1}{10^n}$ για κάθε χ στο Α. Επίσης η σειρά συγκλίνει ως άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\frac{1}{10}$ και μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$. Άρα με βάση το κριτήριο του Weierstrass και η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\phi(10^n x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και άρα, λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης, η προκύπτουσα συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\phi(10^n x)$ είναι συνεχής.

2) Το μη παραγωγίσιμον της f σε κάθε χ στο Α

Έστω $a \in (0,1]$. Τότε το α έχει μια δεκαδική παράσταση ψηφίων (δηλ. ακολουθία) της μορφής :

$a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6....$ Ορίζω την ακολουθία : $h_n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{10^m}\ , \alpha\nu\ \alpha_m \neq 4\ \grave{}\eta\ 9 \\ -\frac{1}{10^m}\ , \alpha\nu\ \alpha_m = 4\grave{}\eta 9 \end{array} \right\}$ (Το γιατί ορίζουμε έτσι την ακολουθία θα φανεί παρακάτω)

Έχω: $\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}\cdot\frac{\phi(10^n(\alpha+h_m))-\phi(10^n\alpha)}{\pm 10^{-m}} =$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pm 10^{m-n}\cdot\left[\phi(10^n(\alpha+h_m))-\phi(10^n\alpha)\right] \qquad (3)$$

Θα δείξουμε, ότι στην πραγματικότητα η (3) δεν είναι ένα άπειρο άθροισμα, αλλά ένα πεπερασμένο.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την σειρά (3) :

- Αν $m \geq n$, Τότε ο αριθμός $10^n \cdot h_m$ είναι ακέραιος και αφού η φ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο κάθε ακέραιο, θα έχω:
  $\phi(10^n(\alpha + h_m)) - \phi(10^n \alpha) =$
  $\phi(10^n \alpha + 10^n h_m) - \phi(10^n \alpha) =$
  $\phi(10^n \alpha) - \phi(10^n \alpha) = 0$
- Αν $n < m$, μπορούμε να γράψουμε :

$$10^n a = \quad \alpha\kappa\varepsilon'\rho\alpha\iota o\varsigma + 0,\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\alpha_{n+4}....\alpha_m....$$

$$10^n(a + h_m) = \alpha\kappa\varepsilon'\rho\alpha\iota o\varsigma + 0,\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\alpha_{n+4}....(\alpha_m \pm 1)....$$

$$\leq \frac{1}{2}$$

$$10^{m-n}\{\phi(10^n(a + h_m)) - \phi(10^n a)\} = \pm 1$$

$$0,\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\alpha_{n+4}... > \frac{1}{2}$$

Για να ισχύει η δεύτερη ισότητα είναι αναγκαίο να έχει οριστεί $h_m=-10^{-m}$, όταν $\alpha_m=9$.

Αν υποθέσουμε ότι $0,\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\alpha_{n+4}....\alpha_m... \leq \frac{1}{2}$, τότε θα ισχύει σίγουρα και ότι

$0,\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\alpha_{n+4}....(\alpha_m \pm 1)... \leq \frac{1}{2}$, διότι στην ειδική περίπτωση όπου m=n+1 , έχουμε φροντίσει να ορίσουμε $h_m=-10^{-m}$, αν $\alpha_m=4$.

Έτσι όμως θα ισχύει και ότι $\phi(10^n(a + h_m)) - \phi(10^n a) = \pm 10^{n-m}$

Η ίδια ισότητα ισχύει και όταν $0,\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\alpha_{n+4}... > \frac{1}{2}$. Άρα ,σε κάθε περίπτωση, για n<m θα έχουμε :

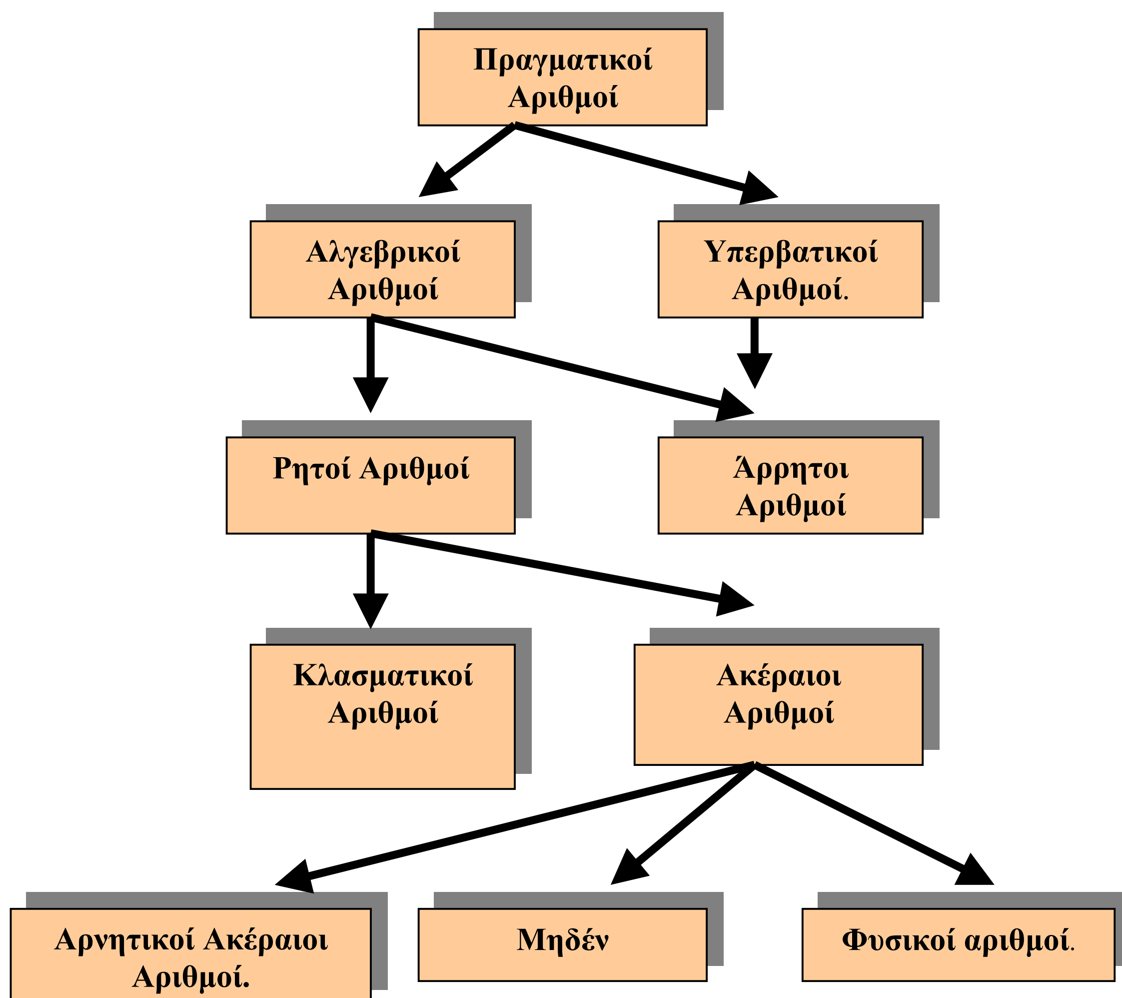
$10^{m-n}\{\phi(10^n(a + h_m)) - \phi(10^n a)\} = \pm 1$ Έτσι η παράσταση $\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$ είναι στην πραγματικότητα άθροισμα m-1 στο πλήθος αριθμών , κάθε ένας από τους οποίους είναι ή 1 ή –1 . Αλλά όταν προσθέτουμε έναν αριθμό το 1 μεταβάλλεται από άρτιο σε περιττό (και αντίστροφα) και όταν προσθέτουμε το –1 μεταβάλλεται ομοίως από άρτιο σε περιττό (και αντίστροφα)

Άρα το άθροισμα m-1 στο πλήθος αριθμών που καθένας τους είναι 1 ή –1 , είναι άρτιος αν m περιττός ή περιττός αν m είναι άρτιος. Έτσι έχω, ότι η ακολουθία

$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$ είναι μια ακολουθία ακεραίων (μη τελικά σταθερή) της οποίας οι όροι είναι ακέραιοι διαδοχικά άρτιων και περιττών. Επομένως δεν μπορεί να συγκλίνει και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο α. , ό.έ.δ.

0. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

0.1.ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



1. Να εξηγηθεί, γιατί δεν έχει ορισθεί η περιττής τάξεως ρίζα αρνητικού αριθμού, παρ' ότι π.χ. αν ορίσουμε $\sqrt[3]{-1}=-1$, τότε δεν φαίνεται να υπάρχει πρόβλημα μονοσήμαντου, αφού η εξίσωση $x^3=-1$ έχει ως μοναδική πραγματική ρίζα το –1 .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Παρατηρούμε τις παρακάτω ισότητες:

$$-1=\sqrt[3]{-1}=(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1,\ \text{άτοπο.}$$

Δηλαδή η παραδοχή του συμβολισμού $\sqrt[3]{-1}=-1$, οδηγεί στο ότι $(-1)^{\frac{1}{3}}=-1$ και επειδή $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ (καθ' όλα επιτρεπτό) οδηγούμαστε στο άτοπο.

Ακριβώς γι' αυτόν τον λόγο, οι μη ακέραιες δυνάμεις, ορίζονται γενικά, μόνο για θετικούς πραγματικούς αριθμούς.

2. Να εξετασθεί η αλήθεια ή το ψεύδος του παρακάτω ισχυρισμού: «Κάθε πραγματικός αριθμός, έχει μονοσήμαντη δεκαδική αναπαράσταση».

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι ψευδής, όπως φαίνεται από το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

Αν $a=1{,}99999......$ τότε

$10a=19{,}99999$

$9a=18{,}00000...$

$a=2$

Δηλ. $2{,}00000....=1{,}9999...$

Να σημειωθεί, ότι γενικώς, αν απαιτηθεί κάθε αριθμός ρητός να γράφεται με την πρώτη γραφή (και όχι με περίοδο το 9) τότε πράγματι ισχύει το μονοσήμαντο της παράστασης κάθε πραγματικού σε δεκαδικό ανάπτυγμα.

3. Να δοθούν παραδείγματα όπου:

α) άρρητος + άρρητος = ρητός

β) άρρητος – άρρητος = ρητός

γ) άρρητος · άρρητος = ρητός

δ) άρρητος : άρρητος = ρητός

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) $(\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=2$

β) $(\sqrt{2}+2)-(\sqrt{2})=2$

γ) $(\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2})=4$

δ) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$.

Στα παραπάνω, θεωρείται γνωστό ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και επίσης ότι ισχύουν οι προτάσεις:

(i) ρητός ± άρρητος = άρρητος

(ii) ρητός : ή · άρρητος = άρρητος

οι οποίες αποδεικνύονται με επαγωγή σε άτοπο.

4. Τα προηγούμενα παραδείγματα, να δοθούν με δεκαδικές αριθμητικές παραστάσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Αν $\alpha=1{,}1010010001000010000010000001...$ τότε ο α είναι άρρητος αφού έχει απειροψήφια μη περιοδική παράσταση.

Ομοίως ο $\beta=1{,}0101101110111101111110...$ είναι άρρητος για τον ίδιο λόγο.

Και $\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=2{,}111111...\\ 10(\alpha+\beta)&=21{,}111111...\end{aligned}\right\}\Rightarrow$ (με αφαίρεση κατά μέλη)

$9(\alpha+\beta)=19\Rightarrow\alpha+\beta=\dfrac{19}{9}$ (ρητος)

β) Αν $\alpha=2{,}101001000100001000001...$ (άρρητος)

$\beta=1{,}101001000100001000001...$ (άρρητος)

Τότε $\alpha-\beta=1$ (ρητός).

γ) Αφού $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ και το ανάπτυγμα του $\sqrt{2}$ θεωρείται γνωστό*, τότε $0{,}4142...\cdot 2{,}4142...=1$.

* Γνωστό υπό την έννοια ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε οποιοδήποτε αρχικό πεπερασμένο τμήμα των άπειρων ψηφίων του, με πεπερασμένα βήματα. Το σύνολο των θέσεων των ψηφίων του δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε, γι' αυτό άλλωστε ονομάζεται και *άρρητος* (= δεν μπορεί να εκφρασθεί). Αλλά είδαμε ότι υπάρχουν και άρρητοι που "εκφράζονται".

δ) Έχω ότι: $1=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα, γνωστού όντος του αναπτύγματος του $R2$, είναι γνωστό και το $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ που προκύπτει με τον αλγόριθμο της διαίρεσης με το 2 και άρα $1{,}4142...\cdot 0{,}707...=1$.

5. Είναι αληθές ότι οι πλέον συνηθισμένοι ρητοί αριθμοί που υπάρχουν είναι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι. Όλοι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι είναι οι ρητοί της μορφής $\frac{\alpha}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}}$, με $\mu,\nu\in$ Í και $(\alpha,2^{\mu}\cdot 5^{\nu})=1$ και μόνον *αυτοί.*

Ως σύνολο είναι μεν απειροσύνολο (στην ζωή μας πάντα πεπερασμένο) αλλά ως κλάση των ρητών αποτελεί μια απειροστή κλάση αυτών, πράγμα που διαισθητικά γίνεται αντιληπτό από τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο παρονομαστής.

Εν κατακλείδι έχουμε:

Δεκαδικοί τερματιζόμενοι: $\frac{\alpha}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}}$, $\alpha\in$ Ù, $\mu,\nu\in$ Í, $(\alpha,2^{\mu}\cdot 5^{\nu})=1$

Ρητοί : $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha,\beta\in$ Ù.

Μπορούμε να πούμε (διαισθητικά πάντα) ότι «Σχεδόν όλοι οι ρητοί, είναι δεκαδικοί περιοδικοί».

Να υπογραμμισθεί , ότι τερματιζόμενοι ρητοί , είναι και οι έχοντες περίοδο το 9 (π.χ. 3,54999999….=3,55)

6. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν άρρητοι *α* και *β* έτσι ώστε ο αριθμός α^{β} είναι ρητός.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ $\alpha=\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{2}$, που είναι άρρητοι. Τότε αν $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι ρητός απεδείχθη. Αν όμως $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος, τότε θεωρώ $\alpha=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

και $\beta = \sqrt{2}$, οπότε $\alpha^{\beta} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}^{2} = 2$ ρητός και η πρόταση απεδείχθη.

7. Υπάρχει άρρητος *α* και ρητός *ρ* έτσι ώστε $\alpha \cdot \rho =$ ρητός.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν α άρρητος και ρ ρητός τότε $\alpha \cdot \rho = \rho'$ (ρητός) θα είχα $\alpha = \dfrac{\rho'}{\rho}$, δηλαδή άρρητο = ρητό, άτοπο.

Όμως τα προηγούμενα ισχύουν με την προϋπόθεση ότι $\rho \neq 0$. Αν $\rho = 0$ τότε $\alpha \cdot 0 = 0$ για κάθε άρρητο *α*.

Επομένως, οποιοσδήποτε άρρητος επί τον ρητό 0 ισούται με τον ρητό 0.

8. Να κατασκευασθεί μαθηματική πρόταση $P(n)$ η οποία να είναι αληθής για τους 10^{1000} πρώτους φυσικούς αριθμούς, αλλά ψευδής για άλλες τιμές του *n*.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ορίζουμε ως $P(n) :=$ «Ο φυσικός αριθμός *n*, δεν διαιρείται ταυτοχρόνως με το 2^{1000} και το 5^{1000}».

Αν ένας φυσικός *n* διαιρείται με τον *α* και με τον *β*, θα διαιρείται και με το γινόμενό τους $\alpha \circ \beta$, υπό την προϋπόθεση ότι $(\alpha, \beta) = 1$.

Επειδή οι 2^{1000} και 5^{1000} είναι πρώτοι μεταξύ τους ο μικρότερος αριθμός που θα διαιρούν και οι δύο θα είναι ο $2^{1000} \cdot 5^{1000} = 10^{1000}$.

Άρα η $\nmid 10^{1000} \forall n \in A = \{n \in \mathbb{N} : n < 10^{1000}\}$. Αριθμίζοντας από το 0, έχω 10^{1000} φυσικούς που δεν διαιρούνται με τους 2^{1000} και 5^{1000}, ενώ η πρώτη τιμή που καθιστά την $P(n)$ ψευδή είναι για $n = 10^{1000}$.

Είναι προφανής μια γενίκευση που μπορούμε να κάνουμε στο παράδειγμα θέτοντας αντί για 10^{1000}, 10^{P}

Και ένα πιο απλό παράδειγμα:

Η εξίσωση $10^{1000}=10^{1000}+ \left[\dfrac{x}{10^{1000}}\right]$ επαληθεύεται για τους πρώτους 10^{1000} πρώτους φυσικούς και δεν επαληθεύεται για τον 10^{1000}.

2. ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}$

1. Υπάρχει (μη κενό) φραγμένο υποσύνολο του Đ το οποίο δεν έχει supremum στο Đ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ $A = \{x \in$ Đ$^+ : x^2 < 2\} \subseteq$ Đ .

- Το A είναι φραγμένο, αφού π.χ. $x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow x < 2, \ \forall x \in A$.
- Το A είναι μη κενό αφού $1 \in A$, διότι $1^2 < 2$. Άρα το A, αν δεχθούμε ότι ικανοποιεί κάποιο αξίωμα της πληρότητας του Đ , θα έχει supremum στο Đ , δηλ. $\sup A = \alpha \in$ Đ και $x \le \alpha, \ \forall x \in A$.
- Αν $\alpha \in A \Rightarrow \alpha^2 < 2 \Rightarrow \alpha^2 - 2 < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (\varepsilon < 2)$ $\alpha^2 - 2 + \varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 2 - \varepsilon \quad \Rightarrow \alpha = \sqrt{2-\varepsilon} < \sqrt{2}$. Όμως ανάμεσα στον $\sqrt{2-\varepsilon}$ και $\sqrt{2}$ υπάρχει πάντα ρητός, ρ (λόγω πυκνότητας του Đ). Δηλαδή $\alpha < \rho \Rightarrow \alpha^2 < \rho^2 < 2$ *άτοπο*.
- Αν $\alpha \notin A \Rightarrow \alpha^2 \ge 2$. Οπότε:

  (i) Αν $\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$ άτοπο αφού $\alpha \in$ Đ .

  (ii) Αν $\alpha^2 > 2 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \alpha^2 = 2 + \varepsilon \Rightarrow \alpha > \sqrt{2+\varepsilon} > \sqrt{2}$. Ανάμεσα στους $\sqrt{2+\varepsilon}$, $\sqrt{2}$ υπάρχει ρητός έστω ρ' και $\alpha > \rho' \Rightarrow \alpha^2 > \rho'^2 > 2$ άτοπο, διότι το ρ' είναι μικρότερο άνω φράγμα από το $\sup A$ και $\rho \notin A$.

Δηλαδή τελικά και για τις τρεις περιπτώσεις καταλήξαμε σε άτοπο, αφού δεχθήκαμε ότι $\sup A \in$ Đ . Επομένως $\sup A \notin$ Đ .

2. Είναι γνωστό, ότι η πεπερασμένη *τομή* (αντ. ένωση) ανοικτών συνόλων, (αντ. κλειστών συνόλων) είναι ανοικτό σύνολο (αντ. κλειστό). Να αποδειχθεί, ότι όταν έχουμε άπειρο πλήθος συνόλων, το συμπέρασμα δεν ισχύει αναγκαστικά.

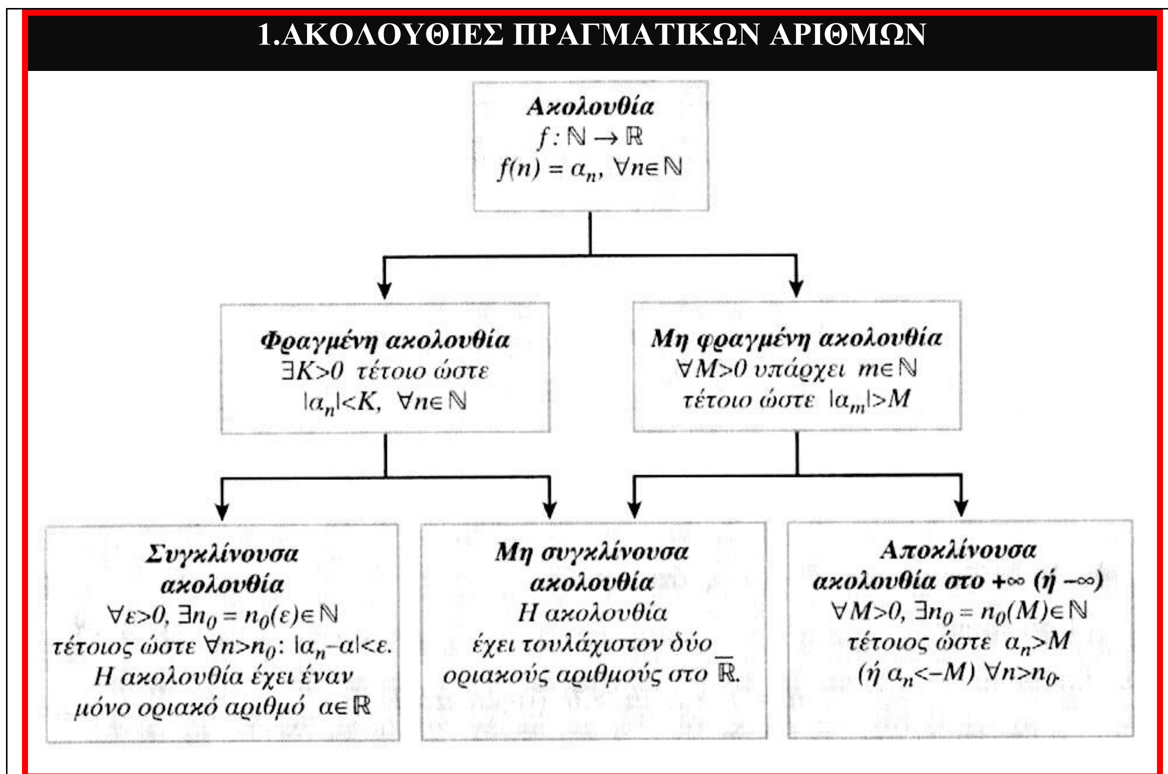
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Πράγματι, έχουμε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$$ (κλειστό)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[+\frac{1}{n},n\right]=(0,+\infty)$$ (ούτε ανοικτό ούτε κλειστό)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n},n\right]=(0,1)$$ (ούτε ανοικτό, ούτε κλειστό)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=(-1,1)$$ (ανοικτό)



Ταξινόμηση των ακολουθιών ανάλογα με το φραγμένον και την σύγκλιση.

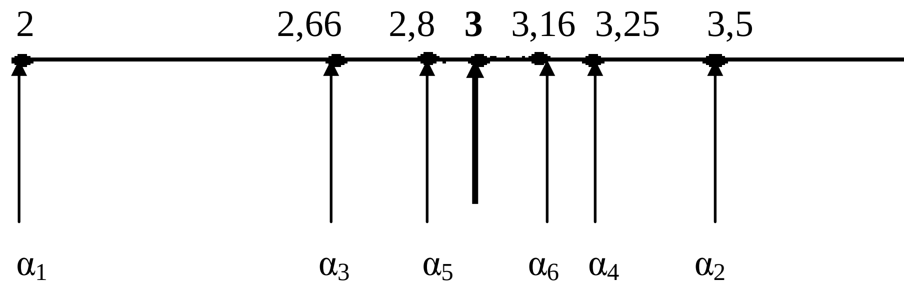
1.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΑΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ – ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΤΟ $a \in R$. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΤΟ $+\infty$ ΚΑΙ $-\infty$ - ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ.

Παραθέτουμε συνήθεις δηλώσεις-παρανοήσεις για τον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας. Όλες οφείλονται σε λανθασμένο νοητικό πρότυπο. Όλες αίρονται με αντιπαραδείγματα:

1. **«Όταν μια ακολουθία συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό α, τότε όλοι οι όροι της πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο α, χωρίς ποτέ να το ξεπερνούν»**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Θεωρούμε την ακολουθία $\alpha_\nu = 3 + \frac{(-1)^\nu}{\nu}$, της οποίας οι όροι άρτιας τάξης πλησιάζουν το 3 από δεξιά και οι όροι περιττής τάξης πλησιάζουν το 3 από αριστερά. Η εικόνα των όρων της ακολουθίας παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα:



Επίσης, όντως η $\alpha_\nu \to 3$, διότι, $\forall\ \varepsilon \rangle\ 0,\ \exists \nu = \nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu - 3| \langle \varepsilon\ \ \forall \nu \geq \nu_0$.

Όντως, ισχύει ότι:

$$|a_\nu - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow 3 + \frac{(-1)^\nu}{\nu} - 3| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(-1)^\nu}{\nu}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\nu}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon \Leftrightarrow (\nu > 0)$$

$$\nu > \frac{1}{\varepsilon} \tag{1}$$

Οπότε, λόγω της (1) για κάθε ε>ο, αρκεί να επιλέγουμε $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Τότε, για κάθε $\nu \geq \nu_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow \nu \rangle \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow |\alpha_\nu - 3| \langle \varepsilon$.

2. **«Σε μια συγκλίνουσα ακολουθία, οι όροι της πλησιάζουν το όριο, οσοδήποτε κοντά, χωρίς ποτέ να φθάνουν σε αυτό». Είναι ορθός ο παραπάνω ισχυρισμός;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αν θεωρήσουμε την ακολουθία:

$$\alpha_\nu = \begin{cases} 1,\underbrace{99...9}_{\nu\text{- ψηφία του 9}} & \text{αν} \quad \nu \leq 200 \\ 2 & \text{αν} \quad \nu \rangle 200 \end{cases}$$

τότε οι όροι της προφανώς πλησιάζουν το 2 μέχρι να τον όρο α_{200} και έπειτα, όλοι οι υπόλοιποι (και άπειροι στο πλήθος) όροι της ισούνται με 2.

Η ακολουθία αυτή, συγκλίνει στο 2, αρκεί για κάθε ε>ο, να θεωρώ $n_0(\varepsilon) = 200$, οπότε $\forall \nu \geq 200 \quad |\alpha_\nu - 2| = |2-2| = 0 \langle \varepsilon$.

3. «Αν μια ακολουθία έχει μόνο ακέραιους όρους, τότε δεν είναι δυνατό να συγκλίνει».
Να εξετασθεί η αλήθεια της παραπάνω πρότασης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Είναι ψευδής, διότι υπάρχει το αντιπαράδειγμα της $\alpha_n = 5, \forall n \in$.

Προφανώς η $\alpha_n \to 5$ και $\alpha_n \in \quad \forall n \in$.

Γενικότερα, για να συγκλίνει μια ακολουθία με ακεραίους όρους, έστω στον $\alpha \in$○, θα πρέπει οσοδήποτε μικρή περιοχή του α, να περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας, ενώ έξω από την περιοχή να είναι πεπερασμένοι όροι της ακολουθίας.

Έτσι, για $\varepsilon = \frac{1}{10} \rangle 0$ θα πρέπει στο $\left(\alpha - \frac{1}{10}, \alpha + \frac{1}{10}\right)$ να περιέχονται άπειροι ακέραιοι όροι και εκτός του διαστήματος πεπερασμένοι.

Όμως σε ένα διάστημα πλάτους 0,2 μόνο ένας ακέραιος μπορεί να υπάρχει και για να συγκλίνει η a_n, αυτός υποχρεωτικά πρέπει να είναι ο α, το όριο της a_n (διότι αν ήταν κάποιος άλλους ακέραιος $\beta \neq 0$, τότε για $\varepsilon = \frac{|\beta - \alpha|}{2}$, στο διάστημα $\left(\alpha - \frac{|\beta-\alpha|}{2}, \alpha + \left|\frac{\beta-\alpha}{2}\right|\right)$ δεν έχω κανένα όρο της ακολουθίας, άρα δεν συγκλίνει, *άτοπο*).

Άρα: **«Για να συγκλίνει μια ακολουθία ακεραίων όρων, θα πρέπει αυτή να είναι <u>τελικά</u> σταθερή (και τελικά ίση με ακέραιο)».**

4. «Εάν σε κάθε περιοχή του α, οσοδήποτε μικρή, υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας a_ν, τότε $\alpha_\nu \to \alpha$».
Είναι ορθός ο παραπάνω ισχυρισμός; Αν ναι, να αποδειχθεί
Αν όχι, να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Όχι, διότι, π.χ. για την ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$, σε κάθε περιοχή του 1 υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας a_ν.

Πράγματι, ισχύει: $\forall \varepsilon > 0, |\alpha_{2n} - 1| = |(-1)^{2n} - 1| = 0 < \varepsilon$.

Δηλαδή, όλοι οι όροι άρτιας τάξεως της ακολουθίας ισούται με 1 και έτσι, «οσοδήποτε κοντά στο 1 υπάρχουν όλοι οι όροι άρτιας τάξης, που είναι άπειροι στο πλήθος».

Όμως, η a_ν δεν είναι συγκλίνουσα όπως θα αποδείξουμε παρακάτω:

Εάν υποθέσουμε ότι $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha_n \to \alpha$, τότε $\varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, υπάρχει

$n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |(-1)^n - \alpha| < \frac{1}{2}$.

Τότε θα έχω: $\left.\begin{array}{ll} |(-1)^{n_0} - a| < \frac{1}{2} & (1) \\ |(-1)^{n_0+1} - a| < \frac{1}{2} & (2) \end{array}\right\}$

Ισχύει:

$$|(-1)^{n_0+1} - (-1)^{n_0}| = |(-1)^{n_0+1} - \alpha - (-1)^{n_0} + \alpha|$$

$$= |[(-1)^{n_0+1} - \alpha] - [(-1))^{n_0} - \alpha]| \leq |(-1)^{n_0+1} - \alpha| + |(-1)^{n_0} - \alpha| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Τελικά, έχω

$$|(-1)^{n_0+1} - (-1)^{n_0}| < 1 \qquad (3).$$

Όμως,

$$|(-1)^{n_0+1} - (-1)^{n_0}| = |(-1)^n \cdot (-1-1)| = |(-1)^{n_0}| \cdot |-2| = 1 \cdot 2 = 2. \qquad (4)$$

Οι (3) και (4) όμως αντιφάσκουν, όπερ **άτοπο**.

Επομένως, $\nexists \alpha \in \mathbb{R} = \alpha_n \to \alpha$.

5. **Η ακολουθία** $\alpha_\nu = e + \frac{1}{\nu}$ **αποτελεί παράδειγμα ακολουθίας της οποίας όλοι οι όροι είναι άρρητοι και συγκλίνει σε άρρητο.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Πράγματι, ο αριθμός $e+\frac{1}{\nu}$ είναι άρρητος $\forall \nu \in \mathbb{N}$, διότι εάν $e+\frac{1}{\nu}=\rho$ (ρητός), τότε $e=\rho-\frac{1}{\nu}$ και το δεύτερο μέλος είναι ρητός ως διαφορά ρητών, ενώ το πρώτο είναι άρρητος, πράγμα **άτοπο**.

Επίσης, $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(e+\frac{1}{\nu}\right)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}e+\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}=e+0=e$.

6. Η πρόταση : «Κάθε ακολουθία ρητών συγκλίνει σε ρητό» είναι ψευδής. Η ακολουθία α_ν, της οποίος ο *ν*-οστός όρος είναι ο αριθμός που σχηματίζεται από τα *ν* πρώτα ψηφία του δεκαδικού αναπτύγματος του αριθμούς *π*, αποτελεί αντιπαράδειγμα ακολουθίας- ρητών που συγκλίνει στον άρρητο *π*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Πράγματι, αν θεωρήσω ως κ_ν την ακολουθία των δεκαδικών ψηφίων του αριθμού π (κ_1=3, κ_2=1,κ_3= 4, κ_4=1 …) τότε, $\alpha_1=3$, $\alpha_2=3{,}1$, $\alpha_3=3{,}14....$, $\alpha_\nu=\overline{\kappa_1,\kappa_2,...\kappa_\nu}$.

Έτσι

$$|\alpha_\nu-\pi|=|3{,}14159...\kappa_\nu-\pi|=\left|-\overbrace{0{,}000000}^{\nu\ \text{μηδενικά}}\kappa_{\nu+1},\kappa_{\nu+2}...\right|=0{,}000...0\ \kappa_{\nu+1}...<\overbrace{0{,}0000...0}^{\nu-\text{μηδενικά}}9999...$$

$$=\overbrace{0{,}0000...}^{\nu-1\,\text{μηδενικά}}1000....=10^{-\nu+1}=\frac{1}{10^{\nu-1}}=\frac{1}{(1+9)^{\nu-1}}\le\frac{1}{1+9(\nu-1)}=\frac{1}{9\nu-8}$$

Δηλαδή τελικώς,

$$|\alpha_\nu-\pi|<\frac{1}{9\nu-8}. \quad (1)$$

Αν *ε>0*, έχω τις ισοδυναμίες:

$$\frac{1}{9\nu-8}<\varepsilon \Leftrightarrow \quad (2)$$

$$9\nu-8>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow$$

$$9\nu>\frac{1}{\varepsilon}+8\Leftrightarrow$$

$$\nu>\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{8}{9}. \quad (3)$$

Οπότε, $\forall \varepsilon > 0$, αρκεί να επιλέγω $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{8}{9}\right] + 1$, από όπου λόγω των (3), (2) και (1) έχω $|\alpha_\nu - \pi| < \ \forall \nu > \nu_0(\varepsilon)$.

Δηλαδή, $\alpha_\nu \to \pi$.

7. Κάθε πραγματικός αριθμός, (ρητός είτε άρρητος), μπορεί να είναι όριο ακολουθίας ρητών.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αν *α* πραγματικός, θεωρώ την ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{[\nu\alpha]}{\nu}$, της οποίας όλοι οι όροι είναι ρητοί.

Ισχυρίζομαι ότι $\alpha_\nu \to \alpha$.

Πράγματι:

$$\nu\alpha - 1 < [\nu\alpha] \le \nu\alpha \Rightarrow$$
$$\frac{\nu\alpha - 1}{\nu} < \frac{[\nu\alpha]}{\nu} \le \frac{\nu\alpha}{\nu} \Rightarrow$$
$$\alpha - \frac{1}{\nu} < \alpha_\nu \le \alpha \Rightarrow$$
$$\alpha - \frac{1}{\nu} \le \alpha_\nu \le \alpha \Rightarrow$$
$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(a - \frac{1}{\nu}\right) \le \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu \le \lim_{\nu\to+\infty} \alpha \Rightarrow$$
$$\alpha \le \lim a_\nu \le \alpha \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \alpha$$

Σχόλιο: Για $\alpha = \pi$, έχω $\alpha_\nu = \frac{[\nu\pi]}{\nu} \to \pi$ που είναι αντιπαράδειγμα ακολουθίας ρητών που συγκλίνει στο *π*. Εδώ το παράδειγμα είναι απλούστατο σε σχέση με την προηγούμενη κατασκευή του παραδείγματος. Η ευκολία όμως αυτή οφείλεται στην ιδιότητα της ανάρτησης «ακέραιο μέρος», η οποία υποκρύπτει μια εξ' ίσου πολύπλοκη «κατασκευή», στην ίδια της την επινόηση καθ' αυτή.

8. Η πρόταση: « Εάν $\alpha_n \to \alpha$ τότε $|\alpha_n| \to |a|$ » είναι αληθής.

1. Να εξετάσετε εάν ισχύει η αντίστροφη πρόταση. Εάν ισχύει να την αποδείξετε,

αν όχι να γράψετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

2. **Υπό ποίες πρόσθετες συνθήκες, η αρχική πρόταση θα μπορούσε να είναι ισοδυναμία;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1) Δεν ισχύει αντίστροφη πρόταση, διότι αν $a_n = (-1)^n$, τότε $|a_n| = |(-1)^n| = 1 \to 1$, ενώ η a_n δεν συγκλίνει. (βλέπε 1.1.4)

2)Επειδή $(a_n \to a \Leftrightarrow -a_n \to -a)$ $(\alpha \neq 0)$ και επειδή το όριο όταν υπάρχει είναι μοναδικό, η αρχική πρόταση θα ισχύει ως ισοδυναμία αν $\alpha_n \to \alpha$ και $-\alpha_n \to \alpha$.

Αλλά αφού $-\alpha_n \to -\alpha$ θα πρέπει $-\alpha \to \alpha$, ισότητα που ισχύει μόνο εάν $\alpha = 0$.

Δηλαδή, τελικά έχουμε $(\alpha_n \to 0 \Leftrightarrow |\alpha_n| \to 0)$.

9. **Εάν μία ακολουθία έχει μόνο θετικούς όρους και είναι γνησίως αύξουσα, τότε τείνει στο +∞;**

Όχι απαραιτήτως.

Για παράδειγμα, για την ακολουθία $a_n = 3 - \frac{1}{n+1}$, ισχύει:

- $3 - \frac{1}{n+1} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, διότι εάν επιλύσουμε το σύστημα $\left\{\begin{matrix} 3 - \frac{1}{n+1} > 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\}$, βρίσκομε ως λύσεις κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- $\alpha_{n+1} > \alpha_n \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{n+2} > 3 - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow n+2 > n+1 \leftrightarrow 2 > 1$ αληθής και ισοδυνάμως ισχύει και η αρχική. Δηλαδή, η a_n είναι γνησίως αύξουσα.
- $\lim_{v\to+\infty} a_n = \lim_{v\to+\infty}\left(3 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{v\to+\infty} 3 - \lim_{v\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 3 - 0 = 3.$

10. **Για μια ακολουθία μη αρνητικών όρων α_n ισχύει ότι «Για κάθε Μ>Ο, (οσοδήποτε μεγάλο) άπειροι στο πλήθος όροι της είναι μεγαλύτεροι από το Μ». Τότε η ακολουθία αυτή τείνει στο +∞;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:Όχι απαραιτήτως.

Για παράδειγμα η ακολουθία:

$$\alpha_n = \begin{cases} n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 0, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Οι όροι άρτιας τάξεως είναι άπειροι, ενώ $\forall M > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 > M$, ενώ υπάρχουν άπειροι άρτιοι μεγαλύτεροι του *n*.

Η ακολουθία $\alpha_n \not\to +\infty$, διότι αν $\alpha_n \to +\infty$, τότε $\forall M > 0$, άρα και για *M*=10, $\exists\ n_0 = n_0(10): \alpha_n > 10\ \ \forall n \geq n_0$.

Αν n_0 άρτιος, τότε $n_0 + 1$ περιττός και $\alpha_{n_0+1} = 0 > 10$ άτοπο.

Αν n_0 περιττός, τότε $\alpha_{n_0} = 0 > 10$ άτοπο.

Επομένως, $\alpha_n \not\to +\infty$.

11. **Εάν μία ακολουθία δεν είναι άνω φραγμένη ενώ είναι κάτω φραγμένη συγκλίνει (κατ' εκδοχήν) στο +∞;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Το προηγούμενο αντιπαράδειγμα εκπληροί τις προϋποθέσεις. Είναι ακολουθία κάτω φραγμένη, δεν έχει άνω φράγμα και δεν συγκλίνει στο +∞.

12 . **«Εάν μία ακολουθία δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη, τότε συγκλίνει ή στο +∞ ή στο -∞ ». Ισχύει ο ισχυρισμός αυτός;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Όχι απαραιτήτως. Για αντιπαράδειγμα η $\alpha_n = \begin{cases} n, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη, ενώ δεν συγκλίνει ούτε στο +∞, ούτε στο -∞.

Πράγματι:

Αν $\alpha_n \to +\infty$, τότε $\forall M > 0$, άρα και για *M*=10 θα υπήρχε $n = n_0(10): \alpha_n > 10\ \ \forall n \geq n_0$.

Τότε,
- αν n_0 περιττός θα ισχύει $\alpha_{n_0} = -n_0 > 10$ άτοπο,
- αν n_0 άρτιος, $n_0 + 1$ περιττός και $\alpha_{n_0+1} = -(n_0 + 1) > 10$ άτοπο.

Άρα $\alpha_n \not\to +\infty$.

Αν $\alpha_n \to -\infty$, τότε $\forall M > 0$ άρα και για M=10 θα υπάρχει $n = n_0(10) : \alpha_n < -10 \;\; \forall n \geq n_0$

Τότε, • αν n_0 άρτιος $\alpha_{n_0} = n_0 < -10$ άτοπο,

• αν n_0 περιττός, $n_0 + 1$ άρτιος και $\alpha_{n_0+1} = (n_0 + 1) < -10$ άτοπο.

Δηλαδή, τελικώς η α_n δεν είναι ούτε στο +∞, ούτε στο -∞

1.2 ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

1. Είναι γνωστό ότι ισχύει η πρόταση: «Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη». Ισχύει το αντίστροφο αυτής της πρότασης;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Πρέπει να αποφανθούμε στο εάν ισχύει ή όχι ότι «Κάθε φραγμένη είναι συγκλίνουσα»

Δεν ισχύει αυτό, διότι υπάρχει ακολουθία, η $a_n = (-1)^n$, η οποία είναι φραγμένη διότι $-2 < \alpha_n < 2 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ και η οποία δεν είναι συγκλίνουσα, όπως δείξαμε στην 1.1.4

2. Είναι γνωστό ότι αν $\alpha_n \to \alpha, \beta_n \to \beta$ τότε $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta,\; \lambda\alpha_n \to \lambda\alpha$, $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to \frac{a}{\beta}$, $(\beta \neq 0)$ $\alpha_n\beta_n \to \alpha\beta$. Ισχύουν τα αντίστροφα των επί μέρους προτάσεων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι. Η απόδειξη μπορεί να γίνει με το ίδιο αντιπαράδειγμα για όλες.

Πράγματι, αν $a_n = (-1)^n$, $\beta_n = (-1)^{n+1}$, τότε:

- $\alpha_n + \beta_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n \cdot (1 + (-1)) = (-1)^n \cdot 0 = 0 \to 0$, ενώ οι α_n, β_n δεν είναι συγκλίνουσες.
- $\alpha_n \cdot \beta_n = (-1)^n \cdot (-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$, ενώ οι α_n, β_n δεν συγκλίνουν.
- $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} = \frac{1}{-1} = -1 \to -1$, ενώ οι α_n, β_n δεν είναι συγκλίνουσες.
- $0 \cdot \alpha_n = 0 \to 0$, ενώ η α_n δεν συγκλίνει.

Αν $\lambda \neq 0$, ισχύει και το αντίστροφο, διότι αν $\lambda\alpha_n \to \lambda\alpha$, τότε $\forall\, \varepsilon > 0$, άρα και για $\varepsilon^* = |\lambda| \cdot \varepsilon > 0$ $\exists\, n = n_0(\varepsilon^*) : |\lambda\alpha_n - \lambda\alpha| < \varepsilon^* \underset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} |\lambda||\alpha_n - \alpha| < |\lambda|\varepsilon \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή $\alpha_n \to a$.

3. Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι δύο ιδιότητες σύγκλισης των ακολουθιών:

Αν $\alpha_n \to a \in \mathbb{R}$ και $\beta_n \to \beta \in \mathbb{R}$, τότε

(i) $\alpha_n + \beta_n \to \alpha + \beta$

(ii) $\alpha_n \cdot \beta_n \to \alpha \cdot \beta$

Εύκολα με μαθηματική επαγωγή, μπορεί να αποδειχθεί ότι και οι δύο ιδιότητες, ισχύουν για οσοδήποτε πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών.

- **Να εξετασθεί αν μπορούν οι ιδιότητες αυτές να επεκταθούν για άπειρο πλήθος ακολουθιών.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) Θεωρώ την σταθερή ακολουθία $a_n = 1 \to 1$

Επίσης, ισχύει ότι: $a_n = 1 = n \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ (1).

Τότε, αν ίσχυε η ιδιότητα της πρόσθεσης των ορίων απείρου πλήθους ακολουθιών, από την (1) θα είχα:

Μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι τελικά $\beta_n \neq 0$, όταν $\beta \neq 0$, διότι από την σύγκλιση, έχω ότι $\forall\, \varepsilon > 0$ άρα και για

$$\varepsilon = |\varepsilon| \;\; n_0 = n_0(\varepsilon) : |\beta_n - \beta| < \left|\frac{\beta}{2}\right| \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} < \beta_n - \beta < \left|\frac{\beta}{2}\right| \Leftrightarrow \beta - \frac{|\beta|}{2} < \beta_n < \beta + \frac{|\beta|}{2} \quad (1).$$

Οπότε, αν $\beta > 0$, η (1) $\beta - \frac{\beta}{2} < \beta_n < \beta + \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{\beta}{2} < \beta_n < \frac{3\beta}{2}$, από όπου αμέσως έχω $\beta_n \neq 0$.

Αν $\beta_n < 0$, η (1) $\Leftrightarrow$ $\frac{3\beta}{2} < \beta_n < \frac{\beta}{2} < 0$, από όπου έχω πάλι $\beta_n \neq 0$.

Δηλαδή, «$\forall\, \alpha_n \to a$, τελικά οι όροι της είναι ομόσημοι του α.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\ (2)\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to+\infty} a_n\frac{1}{n}+\ldots+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0+0+0+\ldots+0\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \text{ άτοπο, αφού } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1.$$

Παρατηρητέο, ότι η (2) *φαίνεται* να έχει πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών, καθώς εφαρμόσαμε το limes και στα δύο μέλη της (1). Όμως, $n\to+\infty$ και θα έπρεπε μετά τον τελευταίο προσθετέο $\frac{1}{n}$ να γράψουμε +…, για να δείξουμε το απειροάθροισμα.

Σε κάθε περίπτωση, όμως, έχουμε άτοπο.

(ii)Για την ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, γνωρίζουμε ότι συγκλίνει στον e.

Όμως,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\ (1)\ \Rightarrow$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow$$

$$e = 1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\Rightarrow$$

$$e = 1 \text{ άτοπο, αφού } \ 2<e<4 \text{ ή } e\approx 2,718....$$

Παρατηρητέο και εδώ, ότι όταν παίρνουμε όριο και των δύο μελών της (1) φαίνεται να έχω πεπερασμένους όρους στο β' μέλος, όμως $n\to+\infty$.

Σε κάθε περίπτωση, όμως, αυτό δεν επιτρέπεται, αφού έχουμε άτοπο!

4. «Αν $\alpha_n \to a \in \mathbb{R}$ και $\beta_n \to \beta \in \mathbb{R}$, τότε η ακολουθία $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ δεν συγκλίνει».

1) Είναι αληθής ο παραπάνω ισχυρισμός; Αν ναι, να αποδειχθεί. Αν όχι, να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

2) Υπό ποίες επιπρόσθετες συνθήκες είναι αληθής ο αρχικός ισχυρισμός; Να γίνει διερεύνηση των περιπτώσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1) Δεν είναι αληθής ο ισχυρισμός. Ως αντιπαράδειγμα θεωρώ τις ακολουθίες $\alpha_n = \frac{1}{\nu} \to 0 \in \mathbb{R}$ και $\beta_n = -\frac{1}{\nu} \to 0$ για τις οποίες έχω $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\frac{1}{\nu}}{-\frac{1}{\nu}} = -1 \to -1$

2) Η απαιτούμενη επιπρόσθετη συνθήκη, για να είναι αληθής ο ισχυρισμός είναι $\alpha \neq 0$ και επίσης η β_n να είναι μηδενική μεν, αλλά με όρους τελικά διάφορους του μηδενός, διότι αλλιώς δεν έχει νόημα να ομιλούμε για ακολουθία $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$.

Συνήθως, όμως, αυτό το τελευταίο συμφωνούμε να εννοείται, διότι όταν στην αρχική διατύπωση λέμε «η ακολουθία $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$» εξυπονοούμε ότι ορίζεται, άρα τελικά οι όροι της βn δεχόμαστε ότι είναι διάφοροι του μηδενός, από τη διατύπωση. Εδώ το σχολιάζουμε για λόγους μαθηματικής αυστηρότητας και καλό είναι να το έχουμε υπ’ όψιν και να το εννοούμε συνειδητά.

Κάνουμε την απόδειξη με την εις άτοπον απαγωγή.

Έστω, ότι η $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ είναι συγκλίνουσα. Τότε θα είναι και φραγμένη και θα υπάρχει

$$\varphi > 0 : \left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| < \varphi \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Επίσης, $\alpha_n \to a$. Αυτό σημαίνει, ότι σε κατάλληλη περιοχή του *a*, η a_n διατηρεί τελικά σταθερό πρόσημο.

Πράγματι, αν $\alpha > 0$ τότε επειδή $\alpha_n \to a$, ισχύει ότι $\forall \varepsilon > 0$, άρα και για

$$\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2} > 0 \;\; \exists\, n = n_1(\varepsilon) : \; |\alpha_n - a| < \frac{|\alpha|}{2} \;\; \forall\, n \geq n_1$$

ή

$$\big||a_n| - |\alpha|\big| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2} \;\; \forall\, n \geq n_1$$

ή

$$-\frac{|a|}{2} < |a_n| - |a| < \frac{|a|}{2} \;\; \forall\, n \geq n_1$$

ή

$$\frac{|a|}{2} < |a_n| < \frac{3|a|}{2} \;\; \forall\, n \geq n_1 \qquad (2)$$

Έχω ακόμη ότι $\beta_n \to 0$. Επομένως, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n = n_2(\varepsilon)$:

$$|\beta_n| < \varepsilon \;\; \forall\, n \geq n_2. \qquad (3)$$

Από (3) έχω $\left|\frac{1}{\beta_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon}\ \ \forall\, n \ge n_3$ (n_3 ο δείκτης πέραν του οποίου έχω τελικά $\beta_n \neq 0$)

ή [από (2)]

$$|\alpha_n| \cdot \frac{1}{|\beta_n|} > |\alpha_n| \cdot \frac{1}{\varepsilon} \underset{(2)}{\Longrightarrow} \left(|\alpha_n| \neq 0\ \forall\, n > n_1\right)$$

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| > \frac{|\alpha|}{2\varepsilon} \tag{4}$$

Συγκρίνοντας τις (1) και (4) παρατηρώ, ότι η (1) ισχύει για σταθερό $\varphi > 0$, ενώ η (4) για μεταβλητό $\varepsilon > 0$. Συνεπώς, αν εκλέξω ως $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2\varphi}$, η (4) δίνει

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| > \varphi. \tag{5}$$

Οι (1), (5) συνιστούν άτοπο.

Ειδικότερα τώρα, μπορούν να αποδειχθούν τα παρακάτω:

- Αν $\alpha_n \to 0$ και $\beta_n \to 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση της $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$, διότι α.χ.(αντιπαραδείγματος χάριν)

α) $\alpha_n = \frac{\alpha}{n} \to 0,\ \beta_n = \frac{1}{n}$ και $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{1}{n}} = \alpha \to \alpha\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

β) $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ \beta_n = \frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$

γ) $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ \beta_n = \frac{1}{n} \to 0$ και $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = -\sqrt{n} \to -\infty$

δ) $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0,\ \beta_n = \frac{1}{n}$ και $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

- Αν $\alpha_n \to \alpha > 0$ και $\beta_n \to 0$, τότε

α) Αν η β_n διατηρεί τελικά θετικό πρόσημο, $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to +\infty$.

β) Αν η β_n διατηρεί τελικά αρνητικό πρόσημο, $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to -\infty$.

γ) Αν η β_n εναλλάσσει το πρόσημό της (η άρνηση των (1,2) με την επιφύλαξη των τελικά μηδενικών όρων), η $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ δεν συγκλίνει.

- Αν $\alpha_n \to \alpha < 0$ και $\beta_n \to 0$, τότε

α) Αν η β_n διατηρεί τελικά θετικό πρόσημο, $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to -\infty$.

β) Αν η β_n διατηρεί τελικά αρνητικό πρόσημο, $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \to +\infty$.

γ) Αν η β_n εναλλάσσει πρόσημο, $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ δεν συγκλίνει.

5. Αν $\alpha_n \to +\infty$ και $\beta_n \to +\infty$ μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση της $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι, διότι έχουμε τα εξής τρία παραδείγματα:

- $\alpha_n = \alpha \cdot n \to +\infty \quad a > 0$

$\beta_n = n \to \infty$, και $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \alpha \to \alpha \quad \forall\, \alpha > 0$

- $\alpha_n = n^2 \to +\infty$

$\beta_n = n \to +\infty$, και $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{n^2}{n} \to +\infty$

- $\alpha_n = n \to +\infty$

$\beta_n = n^2 \to +\infty$, και $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1}{n} \to 0$

Επομένως, το μόνο το οποίο μπορούμε να εικάσουμε με βάση τα προηγούμενα παραδείγματα είναι, ότι: **«εάν συγκλίνει, θα έχει μη αρνητικό όριο».** Αυτό βεβαίως προκύπτει και εξ' αρχής με την παρατήρηση, ότι αφού $\alpha_n \to +\infty$ και $\beta_n \to +\infty$

έχουν και οι δύο τελικά θετικούς όρους, επομένως και το πηλίκο $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ θα έχει τελικά θετικούς όρους.

6. Αν $\alpha_n \to +\infty$ και $\beta_n \to -\infty$ μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή όχι της ακολουθίας $\alpha_n + \beta_n$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Γενικώς η $\alpha_n + \beta_n$ μπορεί να συγκλίνει ή και να αποκλίνει όπως φαίνεται από τα παρακάτω:

1) $\alpha_n = n \to +\infty,\ \beta_n = \alpha - n \to -\infty,$ και $\alpha_n + \beta_n = \alpha \to \alpha\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\alpha_n = n^2 + n \to +\infty,\ \beta_n = -n \to -\infty,$ και $\alpha_n + \beta_n = n^2 \to +\infty$

3) $\alpha_n = n \to +\infty,\ \beta_n = -n^2 + n \to -\infty,$ και $\alpha_n + \beta_n = -n^2 \to +\infty$

4) $\alpha_n = n \to +\infty,\ \beta_n = -n + (-1)^n \to -\infty,$ και $\alpha_n + \beta_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

Δηλαδή δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την $\alpha_n + \beta_n$ κατ' ουδένα τρόπο, αφού τα παραδείγματα καλύπτουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις σύγκλισης ή απόκλισης.

7. Αν $\alpha_n \to 0$ και $\beta_n \to -\infty$ ή -∞ τότε μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση ή όχι της ακολουθίας $\alpha_n \cdot \beta_n$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι, όπως φαίνεται από τα παρακάτω παραδείγματα

1) $\alpha_n = \frac{a}{n} \to 0,\ \beta_n = n \to +\infty,$ και $\alpha_n \cdot \beta_n = \alpha \to \alpha\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}^*$

2) $\alpha_n = \frac{a}{n} \to 0,\ \beta_n = n^2 \to +\infty,$ και $\alpha_n \cdot \beta_n = \alpha \cdot n \to +\infty\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}^*$

3) $\alpha_n = \frac{a}{n} \to 0,\ \beta_n = -n^2 \to -\infty,$ και $\alpha_n \cdot \beta_n = \alpha \cdot (-n) \to -\infty\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$

4) $\alpha_n = (-1)^n \frac{a}{n} \to 0,\ \beta_n = n \to +\infty,$ και $\alpha_n \cdot \beta_n = (-1)^n \cdot \alpha$ αποκλίνει $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^*$

8. Εάν $\alpha_n = 1$ και $\beta_n \to +\infty$, μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση της $\alpha_n^{\beta n}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Γενικώς όχι, όπως φαίνεται από τα παρακάτω παραδείγματα:

- Αν $\alpha_n = 2^{\frac{1}{n}} \to 1$ και $\beta_n = n \to +\infty$, τότε $\alpha_n^{\beta_n} = 2 \to 2$
- Αν $\alpha_n = 2^{\frac{1}{n}} \to 1$ και $\beta_n = n^2 \to +\infty$, τότε $\alpha_n^{\beta_n} = 2^n \to +\infty$
- Αν $\alpha_n = 2^{\frac{(-1)^n}{n}} \to 1$ και $\beta_n = n \to +\infty$, τότε $\alpha^{\beta_n} = 2^{(-1)^n}$ που δεν συγκλίνει, διότι ταλαντεύεται και λαμβάνει εναλλάξ τις τιμές 2 και $\frac{1}{2}$.

9. Αν $0 < \alpha_n < \beta_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ και η β_n είναι συγκλίνουσα, τότε και η α_n συγκλίνει; Τι πρέπει να ισχύει επιπροσθέτως για να υπάρχει η σύγκλιση της β_n;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι απαραιτήτως, διότι εάν $\alpha_n = 2 + (-1)^n$ και $\beta_n = 3 + \frac{1}{n}$, τότε για την α_n έχω $\alpha_n = \begin{cases} 3 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ και η οποία δεν συγκλίνει.

Επίσης, προφανώς ισχύει:

$$0 < \alpha_n < 3 + \frac{1}{n} = \beta_n \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Για να υπάρχει σύγκλιση, θα πρέπει $\beta_n \to 0$, οπότε η δοθείσα σχέση $0 < \alpha_n < \beta_n \to 0$ με βάση το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δίνει $\alpha_n \to 0$.

Σε κάθε άλλη περίπτωση, όπου $\beta \not\to 0$, πάντα μπορώ να βρίσκω παράδειγμα μη συγκλίνουσας ακολουθίας

$$0 < \alpha_n < \beta_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Εάν $\beta_n = \alpha \neq 0$, τότε από την (1) έπεται ότι $\alpha > 0$.

Επίσης, αν $\lambda = \inf\{\beta_n, n \in \mathbb{N}\}$ τότε $0 < \lambda \le \alpha$ ($\lambda \ne 0$, διότι αν $\lambda = 0$, δεδομένου ότι $\beta_n > 0$, το λ.σ.σ. και τότε $\beta_n \to 0$, πράγμα που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι $\beta \not\to 0$).

Έτσι, για την κατασκευή του αντιπαραδείγματος αρκεί να θέσω π.χ.

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{\lambda}{3}, \text{ αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{\lambda}{4}, \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases}, \text{ η } \alpha_n \text{ προφανώς δεν συγκλίνει } 0 < \alpha_n < \beta_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

10. Δίνεται η πρόταση: «Αν για δύο συγκλίνουσες ακολουθίες α_n, β_n, ισχύει $\alpha_n < \beta_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, τότε θα ισχύει και $\lim \alpha_n > \lim \beta_n$».

Αν ισχύει να αποδειχθεί, αν όχι να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα και να βρεθεί η επιπρόσθετη συνθήκη για να υπάρχει σύγκριση μεταξύ των οριακών τιμών.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $\alpha_n = \frac{2}{n}$ και $\beta_n = \frac{1}{n}$, και προφανώς $\alpha_n = \frac{2}{n} > \frac{1}{n} = \beta_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, ενώ $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$.

Γενικά, έχουμε τα εξής: Αν $\beta_n \to \beta_n$ τότε $-\beta_n \to -\beta_n$, ενώ

$\alpha_n - \beta_n = \alpha_n + (-\beta_n) \to \alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$ και $\alpha_n - \beta_n > 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

Γνωρίζουμε, ότι η διαφορά $\alpha - \beta$ δεν μπορεί να είναι αρνητική, διότι τότε, σε κατάλληλη περιοχή του $\alpha - \beta$, τελικά όλοι οι όροι της $\alpha_n - \beta_n$ θα ήταν αρνητικοί, άτοπο. Άρα $\alpha - \beta \ge 0$.

Έτσι, γενικά έχουμε την σωστή πρόταση.

«Αν $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta_n \to \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha_n > \beta_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ τότε $\alpha \ge \beta$».

11. Να εξετασθεί η ισχύς της προτάσεως: «$\alpha_n \to \ell$», τότε $\frac{1}{\alpha_n} \to \frac{1}{\ell}$. Σε περίπτωση που ισχύει να αποδειχθεί. Σε αντίθετη περίπτωση να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Να τεθούν επίσης τυχόν επιπρόσθετοι περιορισμοί, ώστε να ισχύει πάντα το συμπέρασμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Γενικώς, δεν ισχύει το συμπέρασμα, διότι

- Αν $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$, ενώ η $\dfrac{1}{\alpha_n} = (-1)^n \cdot n$ αποκλίνει και μάλιστα δεν συγκλίνει ούτε κατ' εκδοχήν.
- Αν $\alpha_n = \dfrac{1}{n} \to 0,$ τότε η $\dfrac{1}{\alpha_n} = n \to +\infty$.
- Αν $\alpha_n = -\dfrac{1}{n} \to 0,$ τότε η $\dfrac{1}{\alpha_n} = -n \to -\infty$.
- Αν $\alpha_n = n \to +\infty,$ τότε η $\dfrac{1}{\alpha_n} = \dfrac{1}{n} \to 0$.
- Αν $\alpha_n = -n \to -\infty,$ τότε η $\dfrac{1}{\alpha_n} = \dfrac{1}{-n} \to 0$.
- Αν $\alpha_n \to \ell \in \mathbb{R}$(και $\ell \neq 0$), τότε η $\dfrac{1}{\alpha_n} = \dfrac{1}{\ell}$ (γνωστή πρόταση).

Επομένως, επαναδιατυπώνοντας την αρχική πρόταση, έχω: «Αν $\alpha_n \to \ell \in \mathbb{R} - \{0\}$, τότε $\dfrac{1}{\alpha_n} \to \dfrac{1}{\ell}$, όπου φυσικά $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$.

1.3.ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

1. «Αν μία ακολουθία έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες, είναι συγκλίνουσα;»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι, απαραιτήτως. Ως αντιπαράδειγμα θεωρούμε την ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$, η οποία όπως δείξαμε στην 1.1.4, δεν συγκλίνει, όμως οι υπακολουθίες της $\alpha_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$

και $\alpha_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$

2. «Αν μία ακολουθία έχει *κ* το πλήθος ($\kappa \in \mathbb{N}$) συγκλίνουσες υπακολουθίες, είναι συγκλίνουσα;»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι, η ακολουθία:

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{\nu}, & \text{αν} \quad \nu = \kappa p \\ 1+\frac{1}{\nu}, & \text{αν} \quad \nu = \kappa\rho + 1 \\ 2+\frac{1}{\nu}, & \text{αν} \quad \nu = \kappa\rho + 2 \\ \cdots\cdots & \\ (\kappa-1)+\frac{1}{\nu}, & \text{αν} \quad \nu = \kappa\rho + (\kappa\text{-}1) \end{cases}$$

έχει κ το πλήθος συγκλίνουσες υπακολουθίες και μάλιστα σε διαφορετικούς οριακούς αριθμούς.

$$a_{kp} = \frac{1}{\kappa p} \to 0$$

$$\alpha_{\kappa p+1} = 1 + \frac{1}{\kappa p+1} \to 1$$

$$\alpha_{\kappa p+2} = 2 + \frac{1}{\kappa p+1} \to 2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{(\kappa+1)+\frac{1}{\nu}} = (\kappa-1) + \frac{1}{\kappa p + (\kappa-1)} \to \kappa - 1$$

ενώ η α_n n δεν συγκλίνει, όπως προφανώς, μπορεί να αποδειχθεί.

3. «Εάν μία ακολουθία έχει άπειρες το πλήθος συγκλίνουσες υπακολουθίες, είναι συγκλίνουσα;»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ορίζω την ακολουθία

$$\alpha_n = \begin{cases} p - \frac{1}{p^\kappa}, \text{αν} \quad n = p^\kappa, p = \text{πρώτος} \\ 0, \qquad \text{αν} \quad n \neq p^\kappa, p = \text{πρώτος} \end{cases}$$

- Η ακολουθία αυτή έχει τους εξής αρχικούς όρους:

$$\alpha_1 = 0,\ a_2 = 2 - \frac{1}{2^1},\ a_3 = 3 - \frac{1}{3^1},\ a_4 = 2 - \frac{1}{2^2},\ a_5 = 5 - \frac{1}{5^1},\ a_6 = 0,\ a_7 = 7 - \frac{1}{7^1},$$

$$a_8 = 2 - \frac{1}{2^3},\ \alpha_9 = 3 - \frac{1}{3^2},\ a_{10} = 0,\ a_{11} = 11 - \frac{1}{11^1},\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 13 - \frac{1}{13^1},\ a_{14} = 0,$$

$a_{15} = 0, a_{16} = 2 - \frac{1}{2^4}, ...$

- Η ακολουθία είναι μη φραγμένη, αφού η ακολουθία των πρώτων $p_\iota(:2,3,5,7,11,13....)$, περιέχει απείρους όρους (πρόταση Ευκλείδη).
- Η ακολουθία είναι καλώς ορισμένη, διότι αν $p^\kappa = q^\lambda$ (1), με p, q πρώτους, τότε

  από (1): $p / q^\lambda \underset{(q \text{ πρώτος})}{\Rightarrow} p / q$ (1).

  Επίσης, από (1) $q / p^\kappa \underset{(p \text{ πρώτος})}{\Rightarrow} q / p$ (3).

  Από (1), (3) $p=q$ και η (1) δίνει $\kappa=\lambda$.

  Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν επικαλεσθούμε το θεώρημα από την θεωρία αριθμών, που λέει ότι κάθε φυσικός έχει μοναδική παράσταση σε γινόμενο πρώτων.

  Δηλαδή, $p^\kappa = q^\lambda \underset{(p,q \text{ πρώτοι})}{\Rightarrow} (p = q, \kappa = \lambda)$.

  Υπενθυμίζουμε ακόμη, ότι με το «καλώς ορισμένη» αποδείξαμε, ότι η ορισθείσα α_n είναι όντως ακολουθία, δηλαδή «για ένα $n \in$ αντιστοιχίζεται ένας όρος α_n»

  ή αλλιώς περισσότερο φορμαλιστικά αλλά και λειτουργικά ($n_1 = n_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_{n_1} = \alpha_{n_2}$).

- Έχω άπειρες υπακολουθίες της μορφής $\alpha_{pk} \to p$.

4. «Εάν μία ακολουθία έχει άπειρες το πλήθος συγκλίνουσες υπακολουθίες και επί πλέον είναι και φραγμένη, είναι συγκλίνουσα;»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αυτή τη φορά ορίζουμε την ακολουθία ως εξής:

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{p} - \frac{1}{p^\kappa}, & \text{αν} \quad n = p^\kappa \quad p \quad \text{πρώτος} \\ 1, & \text{αν} \quad n \neq p^\kappa \quad p \quad \text{πρώτος} \end{cases}$$

- Όπως δείξαμε να προηγουμένως είναι καλώς ορισμένη.
- Έχει άπειρες υπακολουθίες της μορφής $\alpha_{p\kappa} \to \frac{1}{p} \in [0,1] \forall p$ πρώτο
- Όλοι οι όροι της βρίσκονται στο διάστημα $[0,1]$ και άρα είναι φραγμένη.

- Επί πλέον μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\limsup \alpha_n = 1$ (άπειροι όροι της ισούνται με 1), $\liminf \alpha_n = 0$.

5. Υπάρχει ένα και μοναδικό αντιπαράδειγμα που να ικανοποιεί ακριβώς τις ίδιες προϋποθέσεις των τριών προηγουμένων παραταθέντων αντιπαραδειγμάτων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ναι, κι αυτό είναι η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$, η οποία όντως μπορεί να παρατηρήσει κάποιος είναι το σχεδόν «πασπαρτού» αντιπαράδειγμα των ακολουθιών. Πράγματι:

- Δεν συγκλίνει (1.1.4.).
- Είναι φραγμένη, διότι $|\alpha_n| = |(-1)^n| \le 1 \quad \forall n \in$
- Έχει κ το πλήθος ($\kappa \in$) συγκλίνουσες υπακολουθίες:

  $\alpha_{2p} \to 1, \alpha_{4p} \to 1, \alpha_{6p} \to 1, ...\alpha_{2\kappa p} \to 1, \kappa \in$
- Έχει άπειρες (διαφορετικές) υπακολουθίες που συγκλίνουν στο 1:

  $\alpha_{2p} \to 1, \alpha_{4p} \to 1, \alpha_{6p} \to 1, ...\alpha_{2\lambda p} \to 1, ...$

Τα προηγούμενα περισσότερο πολύπλοκα παρατεθέντα αντιπαραδείγματα είχαν και χαρακτηριστικά που δεν τέθηκαν στις εκφωνήσεις και τα οποία δεν η εκπληροί $\alpha_n = (-1)^n$.

Π.χ.: * Τα ( ) έχουν κ διαφορετικούς ή και άπειρους διαφορετικούς οριακούς αριθμούς, ενώ η α_n έχει μόνο δύο διαφορετικούς οριακούς αριθμούς.

* Οι κ ακολουθίες του ( ) είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους (δηλαδή, ουδείς όρος της μίας είναι ίσος με όρο άλλης.

6. Δίδεται η παρακάτω πρόταση: «Αν α_n και β_n συγκλίνουσες ακολουθίες, τότε $(\lim \alpha_n = \lim \beta_n) \Leftrightarrow (\lim |\alpha_n - \beta_n| = 0)$».

1) Να αποδειχθεί

2) Να εξετασθεί εάν ισχύει η κατεύθυνση (⇒) και για ακολουθίες που τείνουν σε άπειρα όρια. Επίσης αν ισχύει η κατεύθυνση (⇐) για κάθε ακολουθία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1) ($\Rightarrow$) Εάν $\alpha_n \to \alpha$ και $\beta_\nu \to \alpha$, τότε $\forall \varepsilon > 0$, άρα και για $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ θα

$\exists\, n_0 = n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) : |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0$ (1)

Επίσης, θα $\exists\ n_0' = n_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) : |\beta_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0'$ (2),

οπότε αν θέσουμε $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$, τότε οι (1) και (2) θα ισχύουν ταυτοχρόνως για κάθε $n \geq n_0''$.

Με πρόσθετη των (1) και (2) κατά μέλη και με χρησιμοποίηση ιδιοτήτων των απολύτων, έχω:

$$0 \leq |\alpha_n - \beta_n| = |(\alpha_n - a) - (\beta_n - \alpha)| \leq |\alpha_n - a| + |\beta_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0''.$$

Δηλαδή $(\alpha_n - \beta_n) \to 0$ και $|\alpha_n - \beta_n| \to 0$.

($\Leftarrow$) Εάν $|\alpha_n - \beta_n| \to 0$, και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ το όριο της α_n θα δείξω ότι $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι και το όριο της β_n. Ισχύει

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\beta_n - \alpha_n| + \beta_n - \alpha| = |\beta_n - \alpha + \alpha_n - \alpha_n| = |(\beta_n - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha)| \\ &\leq |\beta_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha| \end{aligned} \qquad (3)$$

Όπως και στην απόδειξη της ($\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0$, άρα και για $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ υπάρχουν δείκτες και τελικώς δείκτης n_0'', για τον οποίον

$$|\beta_n - \alpha_n| + |\alpha_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \ \forall\ n \geq n_0''.$$

Δηλαδή, από (3) $0 \leq |\beta_n - a| < \varepsilon\ \forall\ \ n \geq n_0''$, απ' όπου συνεπάγεται ότι $\beta_n \to \alpha$.

2) ($\Rightarrow$) Αν $a_n = n^2 \to +\infty$ και $\beta_n = n \to +\infty$, ενώ $|\alpha_n - \beta_n| = |n^2 - n| \to +\infty \neq 0$

($\Leftarrow$) Αν $\alpha_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $\beta_n = (-1)^n$, τότε $|a_n - \beta_n| = \frac{1}{n} \to 0$, ενώ ούτε η α_n, ούτε η β_n συγκλίνουν.

7. Είναι γνωστό ότι ισχύει η πρόταση: «Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει».

Να εξετασθεί αν ισχύει και η πρόταση:

«Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{Q}$, συγκλίνει στο $\mathbb{Q}$».

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Δεν ισχύει, διότι η ακολουθία που ορίζεται με αναδρομικό τύπο $\left\{\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\end{array}\right\}$ είναι ακολουθία θετικών ρητών, γνησίως μονότονη, φραγμένη και συγκλίνει στον $\sqrt{2} \notin$. Πράγματι,

- Είναι ακολουθία θετικών όρων, διότι $\alpha_1 = 2 > 0$ και αν υποθέσουμε ότι $a_\kappa > 0$, τότε και $\frac{2}{\alpha_\kappa} > 0$, τότε και $\frac{1}{2}\cdot\left(\alpha_\kappa + \frac{2}{\alpha_\kappa}\right) > 0$, δηλαδή $\alpha_{\kappa+1} > 0$.

  Επομένως, με βάση της αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής $\alpha_n \rangle 0, \forall n \in N$

- Ομοίως $a_1 = 2$ ρητός και αν a_κ ρητός, τότε και $\frac{1}{2}\left(\alpha_\kappa + \frac{2}{\alpha_\kappa}\right)$ ρητός, δηλαδή $\alpha_{\kappa+1}$ ρητός.

Επομένως, πάλι από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής α_n ρητός $\forall n \in$.

- Για το μονότονο εξετάζω την διαφορά $\alpha_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{2 - a^2{}_n}{2a_n}$.

  Παρατηρώ, ότι το πρόσημο της διαφοράς $a_{n+1} - a_n$ εξαρτάται από το πρόσημο της διαφοράς $2 - \alpha^2{}_n$ (διότι ήδη δείξαμε ότι $a_n \rangle 0$ άρα και $2\alpha_n \rangle 0$ $\forall$ $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$).

  Έτσι:

$$2 - a_{n+1}^2 = 2 - \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\right]^2 = 2 - \frac{1}{4}\left(\alpha_n^2 + \frac{4}{a_n^2} + 4\right) = -\frac{1}{4}\left(\alpha_n - \frac{2}{a_n}\right)^2 \leq 0.$$

  Δηλαδή, $a^2{}_{n+1} \geq 2$ και αφού $\alpha_1^2 = 2^2 \rangle 0$, έχω $\alpha_n^2 \geq 2$ $\forall n \in N$.

  Δηλαδή, $2 - a_n^2 \leq 0$ $\forall n \in N$ και έτσι $\alpha_{n+1} - a_n \leq 0$.

  Δηλαδή η a_n είναι φθίνουσα.

  Ταυτοχρόνως δείξαμε, ότι είναι κάτω φραγμένη από το 2, άρα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό $x \in$ ℝ και μάλιστα $x \geq 0$.

  Επειδή $\lim \alpha_{n+1} = \lim \alpha_n = x$ από την αναδρομική σχέση, με τις επιτρεπτές πράξεις των ορίων, έχω την εξίσωση: $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ από όπου έχω $x = \sqrt{2}$.

ΣΧΟΛΙΟ 1: Τα παραπάνω αποδεικνύουν την ύπαρξη του $\sqrt{2}$.

ΣΧΟΛΙΟ 2: Το παράδειγμα γενικεύεται, για $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ θέτουμε $\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\alpha}{\beta}\right)$ και $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \frac{\alpha}{\alpha_n}\right)$ $\forall\ n \geq 1$. Τότε έχω ότι $\alpha_n \to \sqrt{\alpha}$, ενώ η σύγκλιση αυτής της ακολουθίας είναι μια ειδική περίπτωση προσέγγισης ρίζας της μεθόδου Newton.

8. Η πρόταση Cauchy στις ακολουθίες λέει ότι: «Αν $a_n \to \in R$ τότε και $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}{n} \to a \in \mathbb{R}$».

Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο της προτάσεως υπό την πρόσθετη προϋπόθεση της μονοτονίας της a_n.

Μπορεί να αποδειχθεί η μη ισχύς αντιστρόφου της προτάσεως Cauchy με κατάλληλο αντιπαράδειγμα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αρκεί να βρούμε μια μη συγκλίνουσα ακολουθία a_n, και για την οποία να ισχύει $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_n}{n} \to a \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε: $a_n = \begin{cases} a & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \alpha + 1 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$ η οποία δεν είναι συγκλίνουσα.

Όμως $\beta_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

(i) $n = 2\kappa$, τότε:

$$\beta_{2\kappa} = \frac{a + (a+1) + ... + a + (\alpha+1)}{2\kappa} = \frac{\kappa\alpha + \kappa(\alpha+1)}{2\kappa} = \frac{2\alpha+1}{2} = \alpha + \frac{1}{2} \to \alpha + \frac{1}{2}.$$

(ii) $n = 2\kappa + 1$, τότε:

$$\beta_{2\kappa+1} = \frac{a + (a+1) + ... + a + (\alpha+1) + a}{2\kappa+1} = \frac{\kappa\alpha + \kappa(\alpha+1) + a}{2\kappa+1} = \frac{2\kappa\alpha + \kappa + \alpha}{2\kappa+1}$$

$$= \frac{\alpha(2\kappa+1) + \kappa}{2\kappa+1} = \alpha + \frac{\kappa}{2\kappa+1} = \alpha + \frac{1}{2 + \frac{1}{\kappa}} \to \alpha + \frac{1}{2+0} = \alpha + \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή, $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}{n} \to a+\dfrac{1}{2}$, ενώ η α_n δεν συγκλίνει.

9. Είναι γνωστό ότι αληθεύει η πρόταση : «Για κάθε φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών (α_n) ισχύει, ότι $\underline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim} a_n^{1/n} \le \overline{\lim} a_n^{1/n} \le \overline{\lim}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$».

Από αυτή την πρόταση, ως πόρισμα, συνάγεται άμεσα ότι αν a_n ακολουθία όρων, με $\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$, τότε και $\lim a_n^{1/n}=a$.

Ισχύει το αντίστροφο αυτού του πορίσματος;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $a_n = 2^{(-1)^n-n} = \begin{cases} 2^{1-n}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ 2^{-1-n}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$

είναι αντιπαράδειγμα ακολουθίας για την οποία έχω $\lim a_n^{1/n} = \dfrac{1}{2}$, ενώ το $\lim\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ δεν υπάρχει.

Πράγματι: $a_n^{1/n} = \sqrt[n]{a_n}$

- Αν $n=2_k$, τότε $\sqrt[2\kappa]{\alpha_{2\kappa}} = \sqrt[2\kappa]{2^{1-2\kappa}} = \sqrt[2\kappa]{\dfrac{2}{2^{2\kappa}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[2\kappa]{2} \to \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$
- Αν $n=2_{k+1}$, τότε $\sqrt[2\kappa+1]{\alpha_{2\kappa}+1} = \sqrt[2\kappa+1]{2^{-1-2\kappa}} = \sqrt[2\kappa+1]{\dfrac{1}{2^{2\kappa+1}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt[2\kappa+1]{1} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$

Άρα $\alpha_n^{1/n} \to \dfrac{1}{2}$.

Όμως για την $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ έχω:

- Αν $n=2\kappa$, τότε η υπακολουθία

$$\frac{a_{2\kappa+1}}{\alpha_{2\kappa}} = \frac{2^{(-1)^{2\kappa+1}-2\kappa-1}}{2^{(-1)^{2\kappa}-2\kappa}} = \frac{2^{-2\kappa-2}}{2^{2\kappa+1}} = 2^{-2\kappa-2+2\kappa-1} = 2^{-3} = \frac{1}{8} \to \frac{1}{8}$$

- Αν $n=2\kappa+1$, τότε η υπακολουθία

$$\frac{a_{2\kappa+2}}{\alpha_{2\kappa+1}}=\frac{2^{(-1)^{2\kappa+2}-2\kappa-2}}{2^{(-1)^{2\kappa}-2\kappa-1}}=\frac{2^{-2\kappa-1}}{2^{-2\kappa+2}}=2^{-2\kappa-1+2\kappa+2}=2^{1}=2\to 2.$$

Δηλαδή, $\nexists$ το $\lim\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\cdot\left(\lim\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=2\neq\frac{1}{8}=\lim\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)$.

10. Να δειχθεί , ότι ακολουθία $\alpha_n=\begin{cases} n & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -n & \text{αν } n \text{ περιττός}\end{cases}$ είναι παράδειγμα μη φραγμένης ακολουθίας, η οποία δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Πράγματι, η α_n είναι μη φραγμένη, διότι αν M ένα άνω φράγμα της, τότε υπάρχει φυσικός *n*: $n>M$ και αν *n* άρτιος τότε $\alpha_n=n>M$ άτοπο, ενώ αν *n* περιττός $n+1$ άρτιος και $\alpha_{n+1}=n+1>M$ άτοπο. Ομοίως η α_n δεν είναι κάτω φραγμένη.

Άρα, η α_n δεν είναι άνω ούτε κάτω φραγμένη, άρα είναι μη φραγμένη.

Επίσης, δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, διότι εάν υπήρχε μία τέτοια, τότε $a_{u_n}\to\kappa\in$○.

Ως συγκλίνουσα θα είναι και φραγμένη, άρα και απολύτως φραγμένη άρα $\exists\varphi>0$:

$$|\alpha_{u_n}|<\varphi,\ \forall u_n\in\ . \tag{1}$$

Αλλά για κάθε πραγματικό, άρα και για τον φ, υπάρχει φυσικός *n* μεγαλύτερός του. Δηλαδή $\exists$■$\in\ :n>\varphi$. Επίσης υπάρχει $U_{n_0}>n$ διότι η U_n είναι αύξουσα ακολουθία δεικτών και άρα μη άνω φραγμένη. Δηλαδή

$$U_{n_0}>\varphi. \tag{2}$$

Οπότε, αν U_n άρτιος ή περιττός

$$|\alpha_{U_{n_0}}|=U_{n_0}>\varphi. \tag{3}$$

Επομένως, η α_n δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

11. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_n=\begin{cases} n & \text{αν } n=3\kappa \\ 1 & \text{αν } n=3\kappa+1 \\ -n & \text{αν } n=3\kappa+2\end{cases}\ \kappa\in$ είναι παράδειγμα μη φραγμένης ακολουθίας η οποία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Με εις άτοπον απαγωγή μπορεί όπως και προηγουμένως να αποδειχθεί το μη φραγμένο της ακολουθίας, η οποία επίσης έχει υπακολουθία συγκλίνουσα των $\alpha_{3\kappa+1} = 1 \to 1,\ \kappa \in$.

12. Να αποδείξετε, ότι στο κάθε φραγμένη ακολουθία, δεν έχει κατ' ανάγκη συγκλίνουσα υπακολουθία

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την ακολουθία $\alpha_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

- Είναι ακολουθία ρητών, διότι προφανώς $\alpha_n \in$, $\forall\ n \in$.
- Είναι ακολουθία θετικών, διότι προφανώς $\alpha_n > 0\ \ \forall\ n \in$.
- Είναι γνησίως αύξουσα, διότι

$$\frac{\alpha_n+1}{\alpha_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \underset{\substack{\text{Ανισωτητα} \\ \text{Bernoulli}}}{\geq} \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{n+1}-\frac{n}{(n+1)^2}-\frac{n}{(n+1)^3} = 1+\frac{(n+1)^2-n(n+1)-n}{(n+1)^3}$$

$$= 1+\frac{n^2+2n+1-n^2-n-.n}{(n+1)^3} = 1+\frac{1}{(n+1)^3} > 1.$$ Άρα $\alpha_{n+1} > \alpha_n\ \ \forall\ n \in$.

- Η α_n είναι φραγμένη. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την ακολουθία $\beta_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ είναι και αυτή ακολουθία θετικών όρων και αν θεωρήσω τον λόγο

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left[1+\frac{1}{n^2+2n}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \underset{\text{Ανισότητα Bernoulli}}{\geq}$$

$$\left(1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2+2n}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} > \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n+1}\right)\cdot\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Δηλαδή $\beta_n > \beta_{n+1} \ \forall\ n \in$. Δηλαδή η β_n είναι γνησίως φθίνουσα.

Όμως, προφανώς $\alpha_n < \beta_n \ \forall\ n \in$.

Έτσι $\alpha_1 = 2 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_n < \ldots < \beta_n < \beta_{n-1} < \ldots < \beta_1 = 4$

ή $2 \leq \alpha_n < 4 \ \forall\ n \in$.

Έτσι, η α_n είναι φραγμένη και γνησίως μονότονη. Επομένως έχει μοναδικό οριακό αριθμό στο ℝ, δηλαδή συγκλίνει στο ○.

Γνωρίζουμε ότι $\alpha_n \to e \notin$ και κάθε υπακολουθία της (επειδή είναι γνησίως μονότονη) θα συγκλίνει κι' αυτή στο $e \notin$. Δηλαδή όλες οι υπακολουθίες της α_n είναι ακολουθίες ρητών, και όλες συγκλίνουν στο $e \notin$.

13. «Αν για μια ακολουθία α_n ισχύει $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \frac{1}{n} \ \forall\ n \in$. Τότε η α_n συγκλίνει». Είναι αληθής η πρόταση;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι. Ως αντιπαράδειγμα έχουμε την ακολουθία (αρμονική σειρά) $\alpha_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Γι' αυτή ισχύει:

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| = \left|1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ \forall\ n \in .$$

Όμως, η α_n δεν είναι συγκλίνουσα:

Πράγματι, ισχύει:

$$|\alpha_{2n} - \alpha_n| = \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right| \geq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή

$$|\alpha_{2n}-\alpha_n| \geq \frac{1}{2} \ \forall\ n \in \qquad \text{ή} \quad |\alpha_{n+\kappa}-\alpha_n| \geq \frac{1}{2} \ \text{για} \quad \nu=\kappa \ \ \forall\ n \in \quad .$$

Η τελευταία σχέση όμως είναι άρνηση της συνθήκης σύγκλισης κατά Cauchy για $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Επομένως η α_n δεν συγκλίνει.

14. Δίνεται η πρόταση: «Αν για μια ακολουθία ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_{n+n_0}-\alpha_n)=0,\ n_0 \in \quad$,

τότε η ακολουθία α_n είναι συγκλίνουσα». Αν είναι αληθής να αποδειχθεί, αν όχι να δοθεί αντιπαράδειγμα

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε και πάλι την αρμονική ακολουθία $\alpha_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

15. Θεωρείται γνωστή η ισχύς της προτάσεως: «Αν $\alpha_n \to \alpha \in \circ-\{0\}$ τότε η $\beta_n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \to 1$».

Γιατί είναι αναγκαία η ισχύς της υποθέσεως $\alpha \in \circ-\{0\}$; Μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα ώστε να συμπεριλαμβάνει και τις μηδενικές ακολουθίες;

η οποία δεν συγκλίνει όπως είδαμε προηγουμένως.

Όμως,

$$|\alpha_{n+n_0}-\alpha_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n_0} \leq \frac{n_0}{n+1} \to 0 .$$

Άρα και $|\alpha_{n+n_0}-\alpha_n| \to 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $\alpha_n = \frac{\alpha}{n} \to 0$, $(\alpha \neq 0)$ τότε $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{\alpha}{n+1}}{\frac{\alpha}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$.

Αλλά:

- Αν $\alpha_n(-1)^n \cdot \frac{\alpha}{n} \to 0$ τότε $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(-1)^{n+1}\frac{\alpha}{n+1}}{(-1)^n \frac{\alpha}{n}} = -\frac{n}{n+1} = -\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to -1$.

- Αν $\alpha_n = \frac{1}{\alpha^n} \to 0,\ (\alpha > 1)$ και $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha} \to \frac{1}{\alpha}$

- Αν $\alpha_n = \begin{cases} \frac{\alpha}{2^n} & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{\beta}{3^n} & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ $(\alpha\beta \neq 0)$ τότε $\alpha_n \to 0$ και

$$\beta_n = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \begin{cases} \frac{\frac{\beta}{3^{n+1}}}{\frac{\alpha}{2^n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 3\frac{\beta}{\alpha}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\frac{\beta}{3^n}} = \frac{\alpha}{2\beta} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$$ η οποία δεν είναι

συγκλίνουσα, αφού η υπακολουθία της $\beta_{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \cdot \frac{3\beta}{\alpha} \to 0 \cdot 3 = 0$ και η υπακολουθία της $\beta_{2n+1} = \frac{\alpha}{2\beta}\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1} \to \pm\infty$ (ανάλογα με το πρόσημο του $\frac{\alpha}{\beta}$).

Από το πρώτο παράδειγμα και από τα υπόλοιπα τρία αντιπαραδείγματα, παρατηρώ ότι υπάρχουν μηδενικές για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα και μηδενικές για τις οποίες δεν ισχύει.

Πριν κάνουμε οποιαδήποτε εικασία, ας κάνουμε την απόδειξη της πρότασης για να δούμε το αναγκαίο του $\alpha \neq 0$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\quad \exists\ n = n_0(\varepsilon) : |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon\ \ \forall\ n \geq n_0. \tag{1}$$

Επίσης από την (1), προφανώς ισχύει

$$|\alpha_{n+1} - \alpha| < \varepsilon\ \ \forall\ n \geq n_0\ \ n_0 + 1 > n_0. \tag{2}$$

Επίσης:

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - 1\right| = \left|\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n}\right| = \left|\frac{(\alpha_{n+1} - \alpha) + (\alpha - \alpha_n)}{\alpha_n}\right| \leq \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha| + |\alpha_n - \alpha}{|\alpha_n|} \tag{3}$$

η (1) για $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{2} > 0$ (εδώ αναγκαστικά υποθέτουμε $\alpha \neq 0$) δίνει

$$|\alpha_n-\alpha|<\frac{|\alpha|}{2}\Rightarrow \big||\alpha_n|-|\alpha|\big|<|\alpha_n-\alpha|<\frac{|\alpha|}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{|\alpha|}{2}<|\alpha_n|-|\alpha|<\frac{|\alpha|}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|\alpha|}{2}<|\alpha_n|<\frac{3|\alpha|}{2},\ \text{που ισχύει}\ \forall\ n>n_0'. \qquad (4)$$

Η (3) λόγω των (1), (2), (4) δίνει

$$\frac{|\alpha_{n+1}-\alpha|+|\alpha_n-\alpha|}{|\alpha_n|}<\frac{2\varepsilon}{\frac{|\alpha|}{2}}=\frac{4\varepsilon}{|\alpha|}\quad (\alpha\neq 0). \qquad (5)$$

Συνεπώς, οι (1) και (2) που ισχύουν $\forall\ \varepsilon>0$, θα ισχύσουν και για $\frac{|\alpha|}{4}\cdot\varepsilon>0$. Τότε η (5) θα γινόταν $\frac{|\alpha_{n+1}-\alpha|+|\alpha_n-\alpha|}{|\alpha_n|}<\varepsilon$ ή τελικά $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}-1\right|<\varepsilon\quad \forall\ \varepsilon>0$ και για κάθε $n>n''=\max\{n_0,n_0\}$. Δηλαδή $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\to 1$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Από την απόδειξη, φαίνεται ότι πρέπει να υποθέσω $\alpha\neq 0$ αναγκαστικά. Παρόλα ταύτα, το αν υπάρχει επιπρόσθετη προϋπόθεση για μια μηδενική έτσι ώστε να ισχύει το συμπέρασμα, παραμένει ως ερώτημα ανοικτό.

16. Δίνεται η πρόταση

«Αν $\alpha_n>0\ \ \forall\ n\in$ και $\alpha_n\to\alpha>0$, τότε $\sqrt[n]{\alpha_n}\to 1$».

1)Να αποδειχθεί

2)Να εξετασθεί τι συμβαίνει αν $\alpha_n\to 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1) Αφού $\alpha_n\to\alpha$, τότε $\forall\ \varepsilon>0$, άρα και για $\varepsilon=\frac{|\alpha|}{2}>0$, υπάρχει $n_0=n_0\left(\frac{|\alpha|}{2}\right)$:

$$|\alpha_n-\alpha|<\frac{|\alpha|}{2},\forall n>n_0\Rightarrow \big||\alpha_n|-|\alpha|\big|\le|\alpha_n-\alpha|<\frac{|\alpha|}{2},\forall n>n_0$$

$$\Rightarrow -\frac{|\alpha|}{2}<|\alpha_n|-|\alpha|<\frac{|\alpha|}{2},\forall n>n_0$$

$$\Rightarrow \frac{|\alpha|}{2} < |\alpha_n| < \frac{3|\alpha|}{2}, \forall n > n_0$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{|\alpha|}{2}} < \sqrt[n]{|\alpha_n|} < \sqrt[n]{\frac{3|\alpha|}{2}}, \forall n > n_0 \qquad (\alpha_n > 0,\ \alpha > 0)$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{\alpha_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}}, \forall n > n_0 . \qquad (1)$$

Αλλά $\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} \to 1$, $\sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}} \to 1$ και από την (1) με βάση το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, έχω και ότι $\sqrt[n]{\alpha_n} \to 1$.

2) • Αν $\alpha_n = \frac{1}{\alpha_n} \to 0$ $(\alpha > 1)$ τότε $\frac{1}{\alpha_n} > 0$ $\forall n \in$ $\sqrt[n]{\alpha_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha_n}} + \frac{1}{\alpha} \to \frac{1}{\alpha}$ $\forall \alpha > 1$.

• Αν $\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{3^n} & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$ τότε $\alpha_n \to 0$ και

$$\sqrt[n]{\alpha_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{3} & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}.$$ Δηλαδή η $\sqrt[n]{\alpha_n}$ δεν συγκλίνει.

Επίσης αν $\alpha_n = \frac{\alpha}{n}$ $(\alpha > 0)$ τότε $\alpha_n > 0$ $\forall n \in$, $\alpha_n \to 0$ και

$\sqrt[n]{\alpha_n} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{n}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{1}{1} = 1$ (αφού $\sqrt[n]{\alpha} \to 1$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ και $\sqrt[n]{n} \to 1$).

Γενικά όταν $\alpha_n \to 0$ και $\alpha_n > 0$ $\forall n \in$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τη σύγκλιση της $\sqrt[n]{\alpha_n}$.

17. Για τα άνω και κάτω όρια δύο ακολουθιών α_n και β_n είναι γνωστό ότι ισχύει γενικά η παρακάτω σχέση:

$$\underline{\lim}\alpha_n + \underline{\lim}\beta_n \le \underline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) \le \overline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) \le \overline{\lim}\alpha_n + \overline{\lim}\beta_n .$$

Να δοθεί παράδειγμα ακολουθιών για τις οποίες να ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\underline{\lim}\alpha_n + \underline{\lim}\beta_n < \underline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) < \underline{\lim}\alpha_n + \overline{\lim}\beta_n < \overline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) < \overline{\lim}\alpha_n + \overline{\lim}\beta_n \quad \textbf{(1)}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν

$$\alpha_n = \begin{Bmatrix} 0 & \text{αν} & n=4 \\ 1 & \text{αν} & n=4\kappa+1 \\ 2 & \text{αν} & n=4\kappa+2 \\ 1 & \text{αν} & n=4\kappa+3 \end{Bmatrix}, \qquad \beta_n = \begin{Bmatrix} 2 & \text{αν} & n=4 \\ 1 & \text{αν} & n=4\kappa+1 \\ 1 & \text{αν} & n=4\kappa+2 \\ 0 & \text{αν} & n=4\kappa+3 \end{Bmatrix} \text{ τότε}$$

$$\alpha_n + \beta_n = \begin{Bmatrix} 2 & \text{αν} & n=4 \\ 2 & \text{αν} & n=4\kappa+1 \\ 3 & \text{αν} & n=4\kappa+2 \\ 1 & \text{αν} & n=4\kappa+3 \end{Bmatrix}$$

$\underline{\lim}\alpha_n = 0$, $\overline{\lim}\alpha_n = 2$, $\underline{\lim}\beta_n = 0$, $\overline{\lim}\beta_n = 2$, $\underline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) = 1$, $\overline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) = 3$.

Τότε η (1) γίνεται: $0 < 1 < 2 < 3 < 4$.

1.4. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Α.ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ:

1. Μια μεγάλη οικογένεια είναι ακολουθίες της μορφής $\alpha_n = \dfrac{p(n)}{q(n)}$, όπου $p(n)$, $q(n)$ πολυώνυμα του n με $\deg p(n) < \deg q(n)$. Π.χ. $\alpha_n = \dfrac{3v^2 + 6v - 5}{-v^3 + 11} \to 0$.

2. Όπως και το προηγούμενο, αλλά αντί για πολυώνυμα να έχω παραστάσεις με ριζικά οιασδήποτε τάξεως όπου πλέον ο «βαθμός» έκαστης παράστασης ορίζεται ως κατάλληλος λόγος του μεγιστοβαθμίου όρου δια της τάξεως της ρίζας, όπως έχω παρακάτω

   π.χ. $\alpha_n = \dfrac{\sqrt[5]{11v^3 + v^2} + \sqrt[4]{v^3 + 5}}{\sqrt[6]{v^5 + v^2 - 2} - \sqrt[2]{v^2 - 5}} \to 0$, διότι ο «βαθμός» της παραστάσεως του αριθμητή είναι το $\max\left\{\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{4}\right\} = \dfrac{3}{4} < \max\left\{\dfrac{5}{6}, \dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{5}{6}$. Πρέπει να λαμβάνεται πρόνοια, ώστε οι παραστάσεις να έχουν τελικά νόημα, εφόσον μας ενδιαφέρει η σύγκλιση.

3. Με εκμετάλλευση της πρότασης «φραγμένη επί μηδενική μας δίνει μηδενική ακολουθία»

   Π.χ. $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ αν $n \to 0$.

4. Εκμετάλλευση της πρότασης, ότι «Εάν $\alpha_n \to 0$ και ισχύει $|\beta_n| \le \kappa |\alpha_n|$, $\forall n \ge n_0$, $\kappa > 0$, τότε $\beta_n \to 0$

Π.χ. $1 \cdot \left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| \le 1 \cdot \left|\dfrac{1}{n}\right|$, $\dfrac{1}{n} \to 0$. Άρα $\dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$.

Β. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΣΕ $\alpha \in \mathbb{R}$ ή $\overline{\mathbb{R}}$

1. Αν $\alpha_n = \dfrac{p(n)}{q(n)}$ με $p(n),\ q(n)$ πολυώνυμα του ν και $\deg p(n) = \deg q(n)$ τότε η α_n συγκλίνει στον λόγο $\dfrac{p(n)}{q(n)}$, όπου p_n ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του $p(n)$ και q_n ο αντίστοιχος του $q(n)$.
2. Γενίκευση του προηγούμενου και σε λόγο παραστάσεων με ριζική όπως και στο ....
3. Εκμετάλλευση των επιτρεπτών πράξεων σύγκλισης μεταξύ ακολουθιών π.χ. $\alpha_n = 5 \to 5$, $\beta_n = \dfrac{1}{n} \to 0$. Άρα $\alpha_n + \beta_n = 5 + \dfrac{1}{n} \to 5 + 0$.
4. Από ακολουθία με γνωστό πεπερασμένο όριο, κατασκευάζω άλλες με το ίδιο όριο, με την βοήθεια του αριθμητικού, γεωμετρικού και αρμονικού μέσου. Συγκεκριμένα, μπορούν να αποδειχθούν τα εξής:
   - Αν $\alpha_n \to \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ τότε $\beta_n = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \to \alpha$
   - Αν $\alpha_n > 0$ και $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\gamma_n = \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} \to \alpha$
   - Αν $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, τότε $\delta_n = \dfrac{n}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_n}} \to \alpha$
5. Ειδικές περιπτώσεις, γενικών περιπτώσεων σύγκλισης:

   α) Αν $|\alpha| < 1$, τότε $\alpha^n \to 0$

   β) Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^n \to +\infty$

   γ) Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^{1/n} \to 1$ (διαφοροποιείται η απόδειξη όταν $0 < \alpha < 1$ και όταν $\alpha > 1$, ενώ για $\alpha = 1$ προφανές)

   δ) $\lim \sqrt[n]{\alpha_1^n + \alpha_2^n + \ldots + \alpha_\kappa^n} = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\}$, $\alpha\infty > 0$

ε) Αν $\alpha_n = n \cdot \alpha^n$, $|\alpha| < 1$, τότε $\alpha_n \to 0$

στ) Αν $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\kappa = 0$, τότε η

$\alpha_n = (\alpha_0 \sqrt{n} + \alpha_1 \sqrt{n+1} + \ldots + \alpha_\kappa \sqrt{n+\kappa}) \to 0$

ζ) Αν $\alpha_1 > 0$, $\alpha_1^2 > \kappa$ και $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{\kappa - \alpha_n^2}{2\alpha_n}$, $\kappa > 0$, τότε $\alpha_n \to \sqrt{\kappa}$

η) Αν $\alpha_1 > 0,\ \kappa > \alpha_1^2 + \alpha_1$ και $\alpha_{n+1} = \dfrac{\kappa}{1+\alpha_n}$ τότε η α_n συγκλίνει στη θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + x - \kappa = 0$

θ) Αν $\alpha_1 \neq 0,\ \beta > 0,\ m \in$, $n > 2$ και $\alpha_{n+1} + \dfrac{m-1}{m}\alpha_n + \dfrac{\beta}{m}\alpha_n^{1-m}$, τότε $\alpha_n \to \sqrt[m]{\beta}$

ι) $\alpha_n \sqrt[n]{p_1\alpha_1^n + p_2\alpha_2^n + \ldots + p_\kappa\alpha_\kappa^n} \to \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\}$, όπου $p_i > 0,\ \alpha_i > 0$, $i = 1(1)\kappa$

ια) Αν $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, τότε $\beta_n = \dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \to 1$

ιβ) Αν $\kappa > 0$, $\alpha_1 = \sqrt{\kappa}$, και $\alpha_{n+1} = \sqrt{\kappa + \alpha_n}$, τότε η α_n συγκλίνει στη θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x - \kappa = 0$

ιγ) Εκμετάλλευση της προτάσεως: «Αν η α_n συγκλίνει, τότε κάθε υπακολουθία της α_{u_n} συγκλίνει στο ίδιο όριο»

- Αν $\alpha_n \to \alpha > 0$ τότε $\sqrt[n]{\alpha_n} \to 1$

Γ. ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1) Εκμετάλλευση της πρότασης ότι «Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη»
2) Ειδικές περιπτώσεις γενικών παραδειγμάτων φραγμένων:

α) Αν $\kappa_i \in \mathbb{R}$, $i = 0(1)\lambda$, $\alpha_\nu^{(i)}$ μηδενικές ακολουθίες, τότε η ακολουθία

$$\alpha_n = \left\{ \begin{array}{lll} \kappa_0 + \alpha_\nu^{(0)}, & \text{αν} & n = p\lambda \\ \kappa_1 + \alpha_\nu^{(2)}, & \text{αν} & n = p\lambda + 1 \\ \cdots & & \\ \kappa_\lambda + \alpha_\nu^{(\lambda)}, & \text{αν} & n = p\lambda + (\lambda - 1) \end{array} \right\}$$

είναι (βλέπε και ....) μη συγκλίνουσα φραγμένη και επιπλέον έχει λ το πλήθος συγκλίνουσες υπακολουθίες σύμφωνα με τον κατά κλάδο ορισμό τους.

β) Η ακολουθία $\alpha_n = \mu \cdot \cos f(n) + \lambda \sin g(n)$, με $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ και f, g συναρτήσεις του n είναι φραγμένη, αφού ισχύει $|\alpha_n| \leq |\mu| + |\lambda|$.

γ) Το προηγούμενο γενικευμένο παράδειγμα, αλλά στην θέση των λ, μ να μπουν ακολουθίες β_n, γ_n που να συγκλίνουν ή να είναι φραγμένες.

3) Κάθε φραγμένη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}^+$ με κατάλληλη περιορισμό στο , δίνει φραγμένη ακολουθία.

4) Κάθε ακολουθία θετικών όρων είναι κάτω φραγμένη από το 0.

5) Κάθε ακολουθία αρνητικών όρων είναι άνω φραγμένη από το 0.

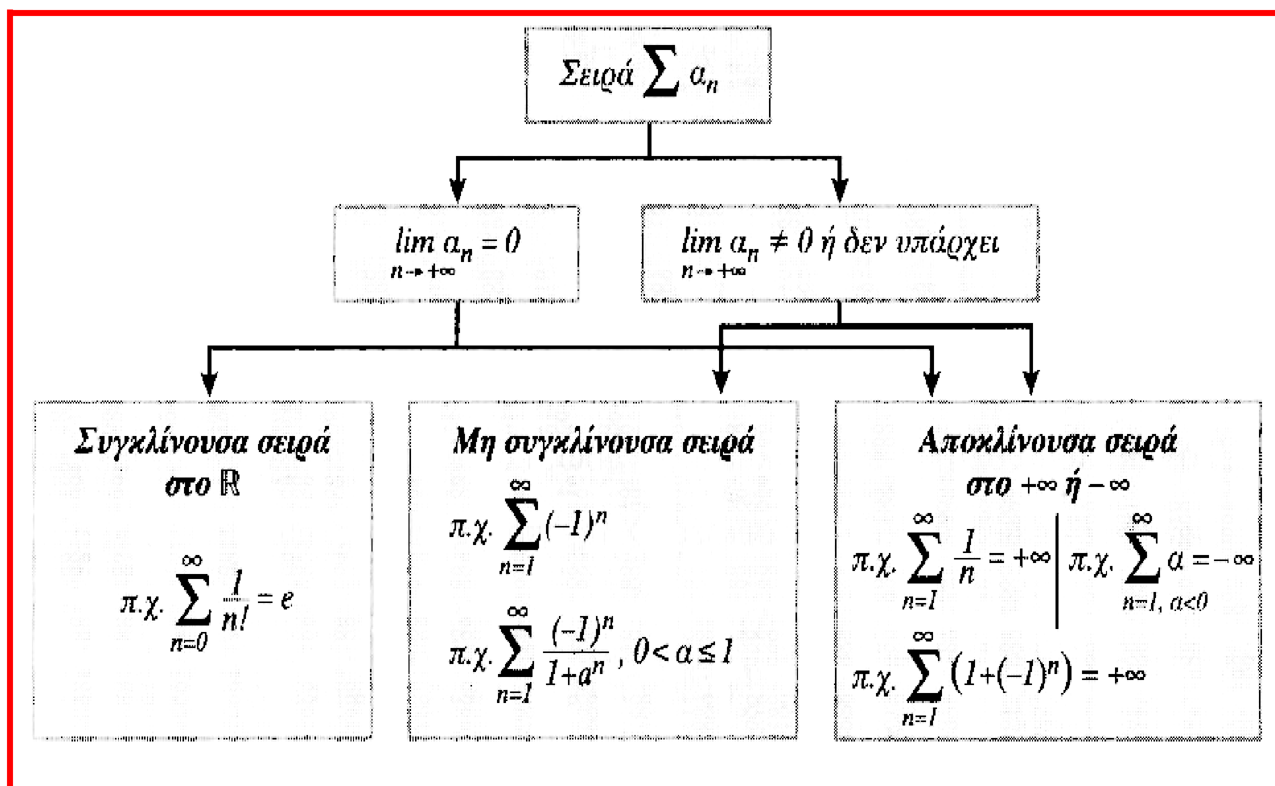
6) Αν $\alpha_n \leq \beta_n \;\; \forall n \in$ και β_n φραγμένη, τότε α_n προφανώς φραγμένη.

7) Αν α_n φραγμένη, τότε και η $\beta_n = \lambda \cdot \alpha_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.

8) Αν $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ και έχει τελικά ομόσημους όρους, τότε η $\beta_n = (-1)^n \cdot \alpha_n$ δεν συγκλίνει κι' είναι φραγμένη.

2. ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2.1.ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ



Ταξινόμηση των σειρών ως προς την σύγκλιση.

1. Δίνεται η πρόταση: "Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε $\alpha_n \to 0$

1) Να αποδειχθεί

2) Να δειχθεί με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

3) Να εξηγηθεί η χρησιμότητα της πρότασης ως κριτηρίου σύγκλισης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε η S_n συγκλίνει και ∃ το $\lim_{n\to+\infty} S_n$. Όμως

$$\alpha_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim \alpha_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} \Rightarrow \lim \alpha_n = 0 - 0 = 0.$$

2) Αν θεωρήσω τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, τότε ναι μεν $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, αλλά αυτή δεν συγκλίνει, διότι:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Επομένως, $S_n > \sqrt{n} \to +\infty$. Άρα και $S_n \to +\infty$. Δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

3) Η συνθήκη “$\alpha_n \to 0$” για την σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ **είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή**. Εάν ήταν αναγκαία και ικανή (ίσχυε δηλαδή και το αντίστροφο) θα είχαμε ένα θαυμάσιο και ασφαλές κριτήριο σύγκλισης. Όμως και τώρα, με την αναγκαία συνθήκη «$\alpha_n \to 0$ εξασφαλίζουμε ότι “αν $\alpha_n \to a \in \overline{\mathbb{R}} - \{0\}$ τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ αποκλίνει». Έτσι βλέπουμε ότι λειτουργεί ως ισχυρότατο κριτήριο απόκλισης δεδομένου ότι η κλάση των μηδενικών ακολουθιών είναι μια ελάχιστη κλάση ακολουθιών.

Επίσης εδώ καθίσταται φανερή η σημασία των μηδενικών ακολουθιών και η έμφαση που δίνεται στη μελέτη τους, μιας και έχουν ρόλο θεμελιώδους σημασίας στην μελέτη σύγκλισης των σειρών. Ως τελική παρατήρηση, συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι οι συγκλίνουσες σειρές είναι απίστευτα «λίγες» αφού αυτές είναι «κάποιες, για τις οποίες ισχύει $\alpha_n \to 0$».

2. Δίνεται η πρόταση: «Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία S_n είναι φραγμένη»

1) Να αποδειχθεί

2) Να εξεταστεί αν ισχύει το αντίστροφο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1) Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε η S_n συγκλίνει. Επειδή όμως κάθε συγκλίνουσα είναι φραγμένη, τότε και η S_n είναι φραγμένη, ό.έ.δ.

2) Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Ως αντιπαράδειγμα χρησιμοποιούμε την $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Αυτή έχει $S_0 = 1$,

$S_1 = \alpha_0 + \alpha_1 = 1 + (-1) = 0$, $\qquad S_2 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 + 1 = 1$

$S_3 = S_2 + \alpha_3 = 1 + (-1) = 0,$. Δηλαδή τελικά έχω: $S_n = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad n = 2k+1 \\ 1 & \text{αν} \quad n = 2k \end{cases}$

που δεν συγκλίνει, αλλά είναι φραγμένη, διότι $0 \le S_n \le 1 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

3. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει και για την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$ ισχύει $\beta_n \le \alpha_n$, $\forall\ n \in$ Í , τότε θα συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι απαραιτήτως:Για παράδειγμα: $\beta_n = -\frac{1}{n} \le 0 = a_n \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$

Η $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=0}^{\infty}0 = 0$,συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\infty$ αποκλίνει.

Γενικά για να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$ θα πρέπει επιπροσθέτως να ισχύει $0 \le \beta_n \le \alpha_n$, όπως απαιτεί το κριτήριο συγκρίσεως σειρών.

4. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει και για την $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$ ισχύει $|\beta_n| \le |\alpha_n|$ $\forall\ n \in$ Í , τότε θα συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι απαραιτήτως.

α.χ. $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \sum(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\text{n}}$, η οποία συγκλίνει βάσει του κριτηρίου Leibniz $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n = \frac{1}{n}$ η οποία ως γνωστόν δεν συγκλίνει και $\left|\frac{1}{n}\right| \le \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$.

Γενικά για να συγκλίνει η $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$ ισχύει η παρατήρηση στο προηγούμενο αντιπαράδειγμα.

5. Ισχύει η πρόταση: «Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$ συγκλίνουν, τότε και η $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + \beta_n)$ συγκλίνει και μάλιστα $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + \beta_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n + \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$ ».

Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα να αποδειχθεί ότι δεν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η βασική αντίστροφη πρόταση είναι ότι «Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + \beta_n)$ συγκλίνει, τότε και οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n$ συγκλίνουν.

Αντιπαράδειγμα αποτελούν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}$ οι οποίες δεν συγκλίνουν, όμως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n + (-1)^{n+1}] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-1) = \sum_{n=0}^{\infty}0 = 0 \to 0$ δηλαδή δεν συγκλίνει.

6. Είναι γνωστή η ισχύς της πρότασης: «Αν η $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει».

Να αποδειχθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$. Είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\alpha_n$, όπου $\alpha_n = \frac{1}{n}$.

Σύμφωνα να το κριτήριο του Leibniz για εναλλάσσουσες σειρές, η $\alpha_n = \frac{1}{n}$ είναι *μηδενική* και *φθίνουσα* ακολουθία *θετικών* όρων, και άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$ συγκλίνει. Όμως η $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ είναι γνωστό (Β.1.3.13) ότι αποκλίνει.

Σχόλιο: Αποδεικνύεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = \log\frac{1}{2} \cong 0{,}6932$.

7. Με ένα κατάλληλο παράδειγμα να δειχθεί, ότι το κριτήριο ρίζας του Cauchy είναι ισχυρότερο από το κριτήριο πηλίκων του D'Alebert.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Βλέπε το Β.1.3.9

Εκεί έχουμε: $\alpha_n = 2^{(-1)^n - n}$, οπότε αν θεωρήσω την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n - n}$ έχω:

α) $\overline{\lim}\sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{1}{2} < 1$ άρα η $\sum_{n=1}^{\infty}\left|2^{(-1)^n - n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n - n}$ συγκλίνει.

β) $\overline{\lim}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 2$, $\underline{\lim}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{8}$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Επειδή λοιπόν γενικά ισχύει

$$\underline{\lim}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \le \underline{\lim}\,\alpha_n^{1/n} \le \overline{\lim}\,\alpha_n^{1/n} \le \overline{\lim}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}, \qquad (1)$$

είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim \alpha_n^{1/n}$ χωρίς να υπάρχει το $\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, ενώ η ύπαρξη του $\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$, λόγω της (1) συνεπάγεται πάντα την ύπαρξη του $\lim a_n^{1/n}$.

8. Άλλο παράδειγμα που δείχνει ότι το κριτήριο ρίζας του Cauchy είναι ισχυρότερο από το κριτήριο πηλίκων του D'Alebert, είναι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5+(-1)^n}\right)^n = \frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^6}+\dots$$

Γι' αυτήν έχω:

$\overline{\lim}\sqrt[n]{\alpha_n} = \frac{1}{2} < 1$ και άρα η σειρά συγκλίνει.

Επίσης $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n \alpha_n & \text{άρτιος} \\ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \alpha_n & \text{περιττός} \end{matrix}\right\}$ οπότε

$\overline{\lim}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = +\infty \quad \underline{\lim}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 0$ και

$\underline{\lim}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < 1 < \overline{\lim}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$

και το κριτήριο δεν αποφαίνεται για την σειρά.

9. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω πέντε προτάσεις είναι όλες ψευδείς:

(i) Αν $\lim\frac{\alpha_n}{\beta_n} = l \in$ Ñ **και η** $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ **συγκλίνει, τότε και η** $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **συγκλίνει.**

(ii) Αν $0 \le \alpha_n \le \beta_n$ **και η** $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ **συγκλίνει, τότε και η** $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ **συγκλίνει.**

(iii) Αν $0 \le \alpha_n \le \beta_n$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$.

(iv) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

(v) **Αν $\alpha_n - \beta_n \to 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η απόδειξη θα γίνει με κατάλληλα αντιπαραδείγματα:

(i) $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Τότε $\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} \to 0 \in Ñ$. Η

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει (κριτήριο Leibniz) αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

(ii) $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$. Τότε $0 \le \frac{1}{n^2} = \alpha_n \le \beta_n = \frac{1}{n}$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

συγκλίνει, ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

(iii) $0 \le \alpha_n = \frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n^2} = \beta_n$. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ συγκλίνει, και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

(iv) Αν $\alpha_n = \frac{1}{n}$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ συγκλίνει ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ δεν συγκλίνει.

(v) $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$, τότε $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} \to 0$, η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$

δεν συγκλίνει.

10. Να εξηγηθεί η διαφορά μεταξύ των εννοιών «αλγεβρικό άθροισμα» και «(άπειρο) άθροισμα σειράς» και με χρήση κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων, όπου χρειάζεται αυτό

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχω τις εξής θεμελιώδεις και ουσιαστικές διαφορές:

1) Το «αλγεβρικό άθροισμα» είναι ορισμένο για πεπερασμένους το πλήθος προσθετέους, ενώ το «άπειρο άθροισμα σειράς» για άπειρους το πλήθος προσθετέους.
2) Ένα πεπερασμένων όρων αλγεβρικό άθροισμα, υπολογίζεται σε πεπερασμένο χρόνο, ενώ ένα άθροισμα απείρων όρων, υπολογίζεται σε άπειρο χρόνο (δηλαδή *δεν* υπολογίζεται σε **οποιονδήποτε** πεπερασμένο) ακόμα κι αν τις αθροίσεις τις εκτελεί η γρηγορότερη μηχανή που υπάρχει

τώρα ή **θα υπάρξει στο μέλλον**. Μια μηχανή χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα μιας πράξης ανά χρονικό διάστημα, έστω t (οποιοδήποτε μικρό). Τότε για άπειρες αθροίσεις χρειάζομαι χρόνο $\infty \cdot t = \infty$ δηλαδή είναι ανέφικτο.

3) Ένα «πεπερασμένο αλγεβρικό άθροισμα» ορίζει πάντα έναν πραγματικό αριθμό, ενώ ένα «άπειρο άθροισμα σειράς» άλλοτε ορίζει πραγματικό αριθμό, άλλοτε όμως όχι.
4) Το «πεπερασμένο άθροισμα» υπολογίζεται πάντα αλγεβρικά, ενώ το «άπειρο άθροισμα σειράς» υπολογίζεται (εάν υπάρχει και εάν είναι εφικτός ο υπολογισμός) με μη αλγεβρικό τρόπο, ως όριο της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Δηλαδή:
   α) Το $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ υπάρχει και το υπολογίζουμε.
   β) Το $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ δεν υπάρχει.
   γ) Το $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ υπάρχει μεν, αλλά είναι εξαιρετικά δύσκολος ή αδύνατος ο ακριβής προσδιορισμός του.
5) Σε ένα «αλγεβρικό άθροισμα», μπορώ να εισάγω ή να εξάγω παρενθέσεις, με επιτρεπτό τρόπο, κατά το δοκούν. Σε ένα μια άπειρη σειρά, αυτό γενικά απαγορεύεται! Ιστορικά η προηγούμενη παρανόηση, υπήρξε πηγή λαθών παραδόξων και διενέξεων την εποχή της θεμελιώσεως του Απειροστικού Λογισμού. (βλέπε και Α.5.2.2). Σύντομα έγινε αντιληπτό ότι «αυτό που ισχύει για πεπερασμένες ποσότητες και μεγέθη, δεν επεκτείνεται αυτονοήτως και για τα άπειρα μεγέθη».

Στο παρακάτω αντιπαράδειγμα θεωρώ την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+2}{n+1} = +\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \frac{7}{6} - \frac{8}{7} + \ldots \qquad (1)$$

Η ανωτέρω σειρά έχει γενικό όρο $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n+2}{n+1}$. Τότε το $\lim \alpha_n$ δεν υπάρχει, άρα η σειρά είναι γνωστό ότι δεν συγκλίνει.

Στο δεύτερο μέλος της (1) εισάγω παρενθέσεις κατά τον επιτρεπτό αλγεβρικά τρόπο.

Τότε θα έχω:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{7}{6}-\frac{8}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{2n+1}{2n}-\frac{2n+2}{2n+1}\right)+\cdots=$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{2n(2n+1)}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει, σύμφωνα με το οριακό κριτήριο συγκρίσεως.

Πράγματι, αν θεωρήσω τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ αυτή συγκλίνει ως γνωστόν. Γι' αυτήν έχω $\beta_n=\frac{1}{n^2}$.

Αν $\alpha_n=\frac{1}{2n(2n+1)}$ τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\frac{\frac{1}{4n^2+2n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4+\frac{1}{2n}}=\frac{1}{4}.$$

Άρα αφού συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}$.

Δηλαδή: Βάλαμε παρενθέσεις σε μία σειρά που δεν συνέκλινε και την μετατρέψαμε σε συγκλίνουσα!

Παραθέτουμε και άλλο χαρακτηριστικό «παράδοξο»

Αν α+β=1 , τότε το άθροισμα S=(α+β)-(α+β)+(α+β)-(α+β)+…..είναι οποιαδήποτε πραγματική τιμή (!!!)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

S=(α+β)-(α+β)+(α+β)-(α+β)+….. $\Rightarrow$ S=α+(β-α)-(β-α)+(β-α)-…… $\Rightarrow$

(Αν β-α = γ) S= α+(γ-γ)+(γ-γ)+(γ-γ)+…. $\Rightarrow$ S=α+0+0+0+0+… $\Rightarrow$ **S=α**

Αλλά αν θέσω αλλιώς τις παρενθέσεις (με επιτρεπτό αλγεβρικά τρόπο) θα έχω :

S=α+γ-(γ-γ)-(γ-γ)-γ-γ)-… $\Rightarrow$ S=α+γ-0-0-0-0-0-… $\Rightarrow$ S=α+(β-α) $\Rightarrow$ **S=β**

Δεδομένου τώρα ότι η διάσπαση του 1 σε άθροισμα δύο αριθμών μπορεί να γίνει με α οποιονδήποτε πραγματικό και β =1-α , τότε έχουμε το «παράδοξο» συμπέρασμα!

Υπάρχει και το απλούστερο αντιπαράδειγμα:

Η $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ δεν συγκλίνει, διότι η $(-1)^n \not\to 0$ (είναι αποκλίνουσα).

Όμως αν εισάγω παρενθέσεις γίνεται συγκλίνουσα, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$
$=0+0+0+0+0+\cdots=0$. Δηλαδή συγκλίνει στο 0.

Αν όμως διατηρήσω το πρώτο 1 και εισάγω παρενθέσεις αμέσως μετά , θα έχω:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots$$ =1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-(1-1)-….

=1-0-0-0-0-….. Δηλ. συγκλίνει στο 1 .

Το λάθος και πάλι, έγκειται στην εισαγωγή παρενθέσεων σε άπειρο άθροισμα.

Και στα τρία προηγούμενα αντιπαραδείγματα, πήραμε μια μη συγκλίνουσα σειρά, θέσαμε παρενθέσεις και η μη συγκλίνουσα μετετράπη σε συγκλίνουσα.

Τι γίνεται όμως με τις συγκλίνουσες;

Εδώ ισχύει η πρόταση:

«Αν σε μια συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ***βάλλουμε σε παρενθέσεις οσουσδήποτε όρους της, χωρίς να αλλάξουμε την τάξη τους, τότε η προκύπτουσα σειρά θα συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο άθροισμα».***

Η απόδειξη της πρότασης είναι απλή:

Αν S_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αρχικής και σ_n η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της προκύπτουσας με εισαγωγή παρενθέσεων, τότε η σ_n θα είναι υπακολουθία της S_n.

Πράγματι, αν

$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + \cdots$ τότε θέτοντας παρενθέσεις έχω

$$S = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m) + (\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \cdots + \alpha_{m+k}) + (\cdots) + \cdots.$$

Δηλαδή $\sigma_1 = S_m, \sigma_2 = S_{m+k}, \ldots$

Η σ_n ως υπακολουθία συγκλίνουσας υπακολουθίας, θα συγκλίνει κι' αυτή, άρα η πρόταση απεδείχθη.

Η προηγούμενη πρόταση περιέχει τη φράση «… χωρίς να αλλάξουμε την τάξη … (των όρων της)». **Επομένως παίζει ρόλο και η διάταξη των όρων στην σύγκλιση. Αυτό φαίνεται από το πιο κάτω αντιπαράδειγμα.**

Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ η οποία βάσει του κριτηρίου του Leibniz συγκλίνει, αφού η $\frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών όρων. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{8}}+\cdots.$$

Αν εφαρμόσω την αντιμεταθετική ιδιότητα στο άπειρο άθροισμα θα αλλάξω την τάξη των όρων της, οπότε θα έχω:

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots \qquad (1)$$

Αν συγκλίνει με την αλλαγή τάξης των όρων της, θα συγκλίνει και με την εισαγωγή των παρακάτω παρενθέσεων:

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\cdots$$

Αλλά όμως:

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}.$$

Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει, άρα και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$ θα αποκλίνει, που είναι η αρχική (1) με την αναδιάταξη. **Άρα η αναδιάταξη γενικώς δεν επιτρέπεται, αφού όπως είδαμε, η αναδιάταξη όρων, μπορεί να μετατρέψει μια συγκλίνουσα σε μη συγκλίνουσα**.

Γενικώς ισχύει το Θεώρημα:

«Αν η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ συγκλίνει απολύτως, και έστω τ μια αναδιάταξη των φυσικών αριθμών, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{\tau(n)}$ συγκλίνει απολύτως και μάλιστα, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{\tau(n)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ » Στην επόμενη εφαρμογή παραθέτουμε ένα τέτοιο παράδειγμα

11. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$ είναι παράδειγμα σειράς που

1) **Συγκλίνει**
2) **Συγκλίνει απολύτως (άρα και απλώς)**
3) **Οποιαδήποτε αναδιάταξη των όρων της δεν επηρεάζει τη σύγκλισή της, ούτε το άθροισμά της**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η σειρά εκπληροί τις προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, Έτσι έχω:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$ είναι άθροισμα απείρων όρων Γ.Π. με πρώτο όρο το 1 και λόγο $-\frac{1}{2}$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ και έχει άθροισμα απείρων όρων Γ.Π. με πρώτο όρο το 1 και λόγο $\frac{1}{2}$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

3) Αναδιατάσσω τους όρους σύμφωνα με τον νόμο: «Μετά από κάθε θετικό, γράφουμε τους δύο επομένους αρνητικούς».

Ο νόμος αυτός φαίνεται και με την αλγεβρική διατύπωσή του παρακάτω:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7}\right)+\left(\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^{11}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{2^{4n+3}}\right)+\cdots=$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{4n+1}}-\frac{1}{2^{4n+3}}\right)=$ (επειδή κάθε μία συγκλίνει)

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{4n+3}}=\frac{4}{3}-\frac{8}{15}-\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$ δηλαδή το άθροισμα μένει αμετάβλητο.

Γενικώς, αν μια σειρά συγκλίνει «με περιορισμό» (ή «υπό συνθήκη» ή είναι ημισυγκλίνουσα) η αναδιάταξη των όρων της μεταβάλει το άθροισμά της ή και την φύση της (μπορεί δηλαδή να την καταστήσει αποκλίνουσα). Χαρακτηριστικό είναι το ***θεώρημα Riemann*** *του οποίου η διατύπωση έχει ως εξής:*

«Μια υπό συνθήκη συγκλίνουσα σειρά, μπορούμε να την κάνουμε να συγκλίνει σε <u>οποιαδήποτε τιμή</u> ή ακόμη <u>να αποκλίνει</u> με μια κατάλληλη αναδιάταξη των όρων της».

12. Δίνεται η πρόταση:

«Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ συγκλίνει».

1) Να αποδειχθεί

2) Να δειχθεί με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι γενικώς δεν ισχύει το αντίστροφο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1) Αφού $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ συγκλίνει $\Rightarrow |\alpha_n| \to 0$. Τότε $\mu\varepsilon\ \varepsilon = 1 > 0$

$\exists n = n_0(1) : 0 < |\alpha_n| < 1| \ \Rightarrow \alpha_n^2 < |\alpha_n|, \quad \forall n > n_0$.

Από το κριτήριο συγκλίσεως σειρών, έπεται και ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ συγκλίνει.

2) Για το αντίστροφο, θεωρώ την $\alpha_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Η αντίστοιχη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ η οποία ως γνωστόν συγκλίνει. Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

Άρα, γενικώς δεν ισχύει το αντίστροφο της προτάσεως.

13. Υπάρχει σειρά που είναι αποφάνσιμη ως προς την σύγκλιση με το κριτήριο λόγου και μη αποφάνσιμη με το κριτήριο πηλίκων του d' Alembert .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Για την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n \cdot e^{-n}}{n!}$ έχω:

$\beta_n = \frac{n^n \cdot e^{-n}}{n!} > 0 \ \ \forall n \in$ Í . Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ και $\alpha_n = \frac{1}{n} > 0$.

Επίσης:

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{1}{\cancel{n+1}} \cdot e^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (\cancel{n+1}) = e^{-1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$

(1)

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}.$$

(2)

Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \text{Í}.$$

(3)

Η (1) λόγω (3) δίνει

$$\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} \geq \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \underset{(2)}{=} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}.$$

Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ δεν συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ δεν συγκλίνει. Σύμφωνα όμως με το κριτήριο πηλίκων του D'Alembert έχω $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \to \frac{e}{e} \cdot 1 = 1$ και δεν έχω αποφανσιμότητα μέσω του κριτηρίου.

Άρα το κριτήριο λόγου εμφανίζεται ισχυρότερο απ' το αντίστοιχο του D' Alembert.

14. Το θεώρημα των Cauchy-Mertens λέει ότι «Αν δύο σειρές συγκλίνουν και τουλάχιστον μία συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ της συνέλιξής τους (ή το κατά Cauchy γινόμενό τους, με $(a_n * \beta_n = \gamma_n := \alpha_n \beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0 \beta_n)$ θα συγκλίνει και μάλιστα $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ ».

1) **Μπορεί να παραληφθεί από το θεώρημα η υπόθεση της σύγκλισης για μία εκ των δύο αρχικών σειρών;**
2) **Αν η σειρά της συνέλιξης δύο ακολουθιών συγκλίνει, θα συγκλίνουν οι δύο αντίστοιχες σειρές των αρχικών ακολουθιών;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1) Δεν μπορεί να παραληφθεί η υπόθεση της απόλυτης σύγκλισης της μιας σειράς, όπως θα δούμε στο παρακάτω αντιπαράδειγμα:

Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$, όπου $\alpha_n = \beta_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$. Και οι δύο συγκλίνουν με βάση το κριτήριο του Leibniz, αφού η $\frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών όρων.

Επίσης δεν συγκλίνουν απόλυτα, αφού $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ η

οποία ως γνωστόν αποκλίνει.

Το κατά Cauchy γινόμενό τους είναι εξ ορισμού

$$\gamma_n = (-1)^{n+1}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}}\right]\Rightarrow$$

$$|\gamma_n| \geq \left[\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}\right]=\frac{n}{\sqrt{n}\sqrt{n}}=\frac{n}{n}=1.$$

Άρα $\gamma_n \not\to 0$. Δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n$ δεν συγκλίνει.

2) Δίνουμε αντιπαράδειγμα, όπου δύο σειρές δεν συγκλίνουν, αλλά έχουν συγκλίνουσα συνέλιξη.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = 1+2+2+2+2+\cdots \text{ (Προφανώς δεν συγκλίνει)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = 1-2+2-2+2-\cdots \text{ (Επίσης δεν συγκλίνει)}$$

Δηλαδή $\alpha_n\begin{cases}1 & \text{αν} \quad n=1\\ 2 & \text{αν} \quad n>1\end{cases}$ $\beta_n\begin{cases}1 & \text{αν} \quad n=1\\ (-1)^{n+1}\cdot 2 & \text{αν} \quad n>1\end{cases}$ για την γ_n έχω:

$$\gamma_1 = \alpha_1\beta_1 = 1\cdot 1 = 1$$
$$\gamma_2 = \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1 = 1\cdot(-2)+2\cdot 1 = 0$$
$$\gamma_3 = \alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_3 = 1\cdot 2+2\cdot(-2)+1\cdot 2 = 0$$

....

$$\gamma_n = \alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\alpha_3\beta_{n-2}+\cdots+\alpha_k\beta_{n-k+1}+\cdots+a_n\beta_1$$
$$=1\cdot(-1)^{n+1}\cdot 2+2\cdot(-1)^n\cdot 2+2\cdot(-1)^{n-1}\cdot 2+\cdots+2\cdot(-1)^{n-k+2}2+\cdots+2\cdot 1=0$$

Δηλαδή $\gamma_n\begin{cases}1 & \text{αν} \quad n=1\\ 0 & \text{αν} \quad n>1\end{cases}$.

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = 1+0+0+\cdots = 1$ ενώ οι $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ δεν συγκλίνουν.

2.2.ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ

Α. ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ:

Εκμεταλλευόμαστε γνωστές προτάσεις, έτσι :

1) Αποκλίνουσα είναι κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ με $\alpha_n \to \alpha \in \text{Ñ} - \{0\}$ ή $\alpha_n \to \pm\infty$ ή η α_n να αποκλίνει γενικώς. Η κλάση των αποκλινουσών σειρών είναι όπως γνωρίζουμε εξαιρετικά ευρεία.

2) Αποκλίνουσες $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ για τις οποίες ισχύει $\alpha_n \to 0$:

   α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (αρμονική σειρά και απειρίζεται θετικά)

   β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ (σειρά Abel και απειρίζεται θετικά)

   γ) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ απειρίζεται θετικά τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}(-\alpha_n)$ απειρίζεται αρνητικά

   δ) Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{n+k}$ έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς την σύγκλιση. Δηλαδή αν συγκλίνει η μία, θα συγκλίνει και η άλλη, αν αποκλίνει η μία, ομοίως και η άλλη, αν απειρίζεται θετικά η μία ομοίως και η άλλη, αν απειρίζεται αρνητικά η μία, ομοίως και η άλλη. Σε περίπτωση σύγκλισης, τα αθροίσματα προφανώς δεν είναι ίσα, αφού λείπουν k όροι από την μία.

   ε) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\rho}}$, $\rho \le 1$. Απειρίζεται θετικά.

   στ) Για τις άπειρες $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$ με $\alpha_n > 0$ ισχύει, ότι αν αποκλίνει η μία, αποκλίνει και η άλλη.

Β. ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\cdot\lambda^{n-1} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$, αν $|\lambda| < 1$ (άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας γεωμ. Προόδου)

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\rho}}$ συγκλίνει για $\rho>1$ (Συνάρτηση J του Riemann $J(\rho)$) (Υπ. $S_n \le S_{n+1}$ και $S_n \le S_{2n-1} < \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^{\rho-1}}}$)

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, $0 \le x < 1$ (Υπ. Κριτήριο ρίζας Cauchy)

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{n+1}}$, $x \in$ Ñ (Υπ. Κριτήριο ρίζας Cauchy)

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{x^2+\sqrt{n}}$, $x<1$ (Κριτήριο πηλίκων D' Alembert)

6) Αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, $\alpha_n \ge 0$, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\alpha_n}}{n}$ (Υπ. $\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta \in$ Ñ$^{+}$)

7) Αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$, ($\alpha_n > 0,\ \beta_n > 0\ \forall\ n \in$ Í) τότε θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_n\beta_n}$ (Υπ. $\alpha+\beta \ge 2\sqrt{\alpha\beta},\ \alpha>0,\ \beta>0$)

8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\rho} n}$, $\rho>1$ (Υπ. Κριτήριο συμπυκνώσεως Cauchy)

9) $\sum_{n=0}^{\infty}\eta\mu x^n$, $x \in (0,1)$ (Υπ. $\alpha_n = \eta\mu x^n$, $\beta_n = x^n$, $\lim\frac{\eta\mu x^n}{x^n}=1$)

10) $\sum_{n=0}^{\infty}\ln(1+x^n)$, $x \in (0,1)$ (Υπ. $\lim\frac{\ln(1+x^n)}{x^n}=1$)

11) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$, $\alpha<\frac{1}{e}$ (Υπ. Κριτήριο Raabe)

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ (Υπ. Κριτήριο Abel)

13) Αν $\alpha_n > 0\ \forall\ n \in$ Í και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει στο $l \in$ Ñ, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n}{n(n+1)}$ συγκλίνει επίσης στο *l*.

14) Αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, τότε θα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n)^{\frac{n}{n+1}}$.

15) Η $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ συγκλίνει

16) Η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1)$ συγκλίνει

17) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n^2}$, $x \in [-2,2]$ συγκλίνει

18) Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)!} x^n$, $x \in$ Ñ , συγκλίνει

19) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$, $x \in (-e, e)$, συγκλίνει

20) Να κατασκευασθεί δυναμοσειρά που να συγκλίνει σε γνωστό διάστημα (α, β) $(\alpha, \beta \in$ Ñ$^+$).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θέλω η σειρά να συγκλίνει για $x \in (\alpha, \beta)$ δηλαδή

$$\alpha < x < \beta \Leftrightarrow \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} < x - \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta - \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow -\frac{\beta-\alpha}{2} < x - \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Έτσι, αναζητώ δυναμοσειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n$, με ακτίνα συγκλίσεως $\rho = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Πρέπει λοιπόν από κριτήριο συγκλίσεως Cauchy $\lim \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \frac{2}{\alpha+\beta}$. Αρκεί να επιλέξουμε $\alpha_n = \left(\frac{2}{\alpha+\beta}\right)^n$.

Γ. ΑΘΡΟΙΖΟΜΕΝΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Είναι αυτές για τις οποίες μπορεί να υπολογισθεί το μερικό άθροισμα S_n και δεν υπάρχουν πολλές τέτοιες κλάσεις. Οι υπάρχουσες είναι ειδικής μορφής , όπως οι παρακάτω:

1) Αριθμητική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha + (n-1)\omega]$, $\alpha, \omega \in$ Ñ

$$S_n = \frac{2\alpha + (\nu-1)\omega}{2} \cdot \nu$$

2) Γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot \lambda^{\nu-1}$, $\lambda \neq 1$

$$S_n = \alpha \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(n) - \varphi(n+1)]$, όπου $\varphi(n)$ ακολουθία. Τότε

$S_n = \varphi(1) - \varphi(n+1)$ ή $S_n = \varphi(0) - \varphi(n+1)$ αν $\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi(n) - \varphi(n+1)]$.

Η κατασκευή μιας τέτοιας σειράς είναι πολύ εύκολη, αλλά η αναγνώριση ότι ο γενικός όρος α_n τίθεται στην μορφή $\varphi(n) - \varphi(n+1)$ είναι το δύσκολο από τον λύτη.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}[A \cdot \varphi(n) + B \cdot f(n+1) + \Gamma \cdot \varphi(n+2)]$ με $A + B + \Gamma = 0$. Τότε

$S_n = A\varphi(1) - \Gamma\varphi(2) - A\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2)$.

Και εδώ η κατασκευή του παραδείγματος είναι απλή, αλλά δύσκολη η αναγνώριση.

5) $\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi(n) + f(n)]$ ή $\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi(n) + f(n) + g(n)]$ όπου $\varphi(n), g(n), f(n)$ οι γενικοί όροι αθροιζόμενων σειρών.

6) $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot x^n$, όπου $f(n)$ πολυώνυμο του *n*.

Σε παραδείγματα τέτοιας μορφής θεωρούμε γνωστά τα αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. κ.ο.κ.

Για να υπολογίζουμε αθροίσματα ανωτέρων δυνάμεων, υπάρχει επαγωγικός τρόπος με την βοήθεια του διωνύμου του Newton. Για παράδειγμα για τον υπολογισμό του $\sum_{k=1}^{n} k^3$ εργάζομαι ως εξής:

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$
$$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

(1)

Θέτοντας στην (1) διαδοχικά $x = 1,2,3,...,n$ έχω

$$
\begin{aligned}
2^4-1^4 &= 4\cdot 1^3+6\cdot 1^2+4\cdot 1+1\\
3^4-2^4 &= 4\cdot 2^3+6\cdot 2^2+4\cdot 2+1\\
4^4-3^4 &= 4\cdot 3^3+6\cdot 3^2+4\cdot 3+1\\
5^4-4^4 &= 4\cdot 4^3+6\cdot 4^2+4\cdot 4+1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(n+1)^4-(n)^4 &= 4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1\\
\hline
(n+1)^4-1 &= 4\cdot\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+4\cdot\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1
\end{aligned}
$$

(2)

Η (2) επιλύεται ως προς $\sum_{k=1}^{n}k^3$ γνωστών όντων των αθροισμάτων μικροτέρας τάξεως.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha+(n+1)\omega]\cdot\beta x^{n-1}$. Δηλαδή ο γενικός όρος a_n είναι το γινόμενο του γενικού όρου αριθμητικής προόδου με τον γενικό όρο μιας γεωμετρικής προόδου (μεικτή πρόοδος). Η άθροιση γίνεται ως εξής. Αν

$$S_n=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n$$

(1)

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με τον λόγο της γεωμετρικής προόδου x και έπειτα αφαιρούμε κατά μέλη από την (1).

Παράδειγμα: $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $|x|<1$. Έχω:

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}\\
xS_n &= x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n
\end{aligned}
$$

(1)
(2)

$$
\begin{aligned}
(1)-(2)\qquad (1-x)S_n &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}-nx^n \Rightarrow\\
(1-x)S_n &= \frac{x^n-1}{x-1}-nx^n \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\boxed{S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}}$$

8) Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n!}$, $\varphi(n)$ πολυώνυμο του n και k ο βαθμός του πολυωνύμου $\varphi(n)$, τότε το $\varphi(n)$ μπορεί να παρασταθεί ως

$$\varphi(n) = A_0 + A_1 n + A2n(n-1) + A_3 n(n-1)(n-2) + \cdots + A_k n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

και η σειρά είναι αθροιζόμενη, όπως έχω στο παρακάτω

Παράδειγμα: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-3n+2}{n!}$.

Θέτοντας $n^2 - 3n + 2 \equiv An(n-1) + Bn + \Gamma$, από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα έχω $(A = 1, B = -2$ και $\Gamma = 2)$.

Τότε

$$\alpha_n = \frac{n^2-3n+2}{n!} = \frac{n(n-1)-2n+2}{n!} = \frac{n(n-1)}{n!} - \frac{2n}{n!} + \frac{2}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} - \frac{2}{(n-1)!} + \frac{2}{n!}$$

Τότε για $n \geq 2$ έχω:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \sum_{k=2}^{n}a_k + \alpha_1 = \sum_{k=2}^{n}\alpha_k + 0 = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)!} + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!} - 2\left(-\frac{1}{0!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n!}\right) + 2\left(-\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

$$\Rightarrow e - 2(-1+e) + 2(-2+e) = e + 2 - 2e - 4 + 2e = e - 2.$$

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n) - f(n+k)],\ n,k \in$ Í, $n \leq k$. Τότε:

$$S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(k) - f(n+1) - f(n+2) - \cdots - f(n+k).$$

3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1. ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Εάν δύο συναρτήσεις έχουν ταυτόσημες αναλυτικές εκφράσεις (: τύπους) είναι ίσες;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι απαραιτήτως. α.χ.:

$$f(x) = 2x/\{-1,0,1\} \quad \text{και} \quad g(x) = 2x/[-1,1]$$

Προφανώς $f \neq g$ αφού $\mathrm{D}(f) \neq \mathrm{D}(g)$

2. Εάν δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις (: τύπους) είναι πάντα διαφορετικές;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι απαραιτήτως. α.χ.

$$f(x) = 2x/\{-1,0,1\} \quad \text{και} \quad g(x) = 2x^3/\{-1,0,1\}$$

Ισχύει $f = g$, ενώ οι αναλυτικές εκφράσεις είναι διαφορετικές.

3. Εάν $f(x) \cdot g(x) = 0 \;\; \forall x \in A$, όπου A το κοινό πεδίο ορισμού των f, g, τότε μια τουλάχιστον από τις f, g είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι απαραιτήτως. α.χ.

Αν $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \;\; x \;\; \text{άρρητος} \\ 1 & \text{αν} \;\; x \;\; \text{ρητός} \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \;\; x \;\; \text{άρρητος} \\ 0 & \text{αν} \;\; x \;\; \text{ρητός} \end{cases}$

τότε $f(x) \cdot g(x) = 0 \;\; \forall x \in$ Ñ χωρίς καμμία να είναι σταθερή.

Επιπλέον, το αντιπαράδειγμα των f, g είναι τέτοιο ώστε να πληροί και την επιπρόσθετη προϋπόθεση ότι **«δεν υπάρχει υποδιάστημα στο πεδίο ορισμού της *f* είτε της *g* που ο περιορισμός της *f* ή της *g* αντιστοίχως, να είναι η μηδενική συνάρτηση».**

4. Να αποδειχθεί η ισχύς ή η μη ισχύς εν γένει, των ισοτήτων:

α) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$

β) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$

όπου f, g, h : συναρτήσεις Ñ $\to$ Ñ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Δεν ισχύει γενικώς: Α.χ.: $f(x) = x^2$, $h(x) = 1$, $g(x) = 1$. Τότε

$$[f \circ (g+h)](x) = f(g(x) + h(x)) = f(1+1) = f(2) = 2^2 = 4$$

$$[(g+h) \circ f](x) = (g+h)(f(x) = (g+h)(x^2) = g(x^2) + h(x^2) = 1^2 + 1^2 = 2 .$$

β) Ισχύει πάντα: Πράγματι, $\forall x \in$ Ñ , έχουμε:

$$[(g+h) \circ f](x) = (g+h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x))$$
$$= h(f(x)) + g(f(x)) = (h+g)(f(x)) = [(h+g) \circ f](x)$$

5. Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν συναρτήσεις με κλάδους, να έχουν απλή αναλυτική έκφραση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα δώσουμε τρία παραδείγματα διαβαθμισμένα από το πλέον σύνηθες, έως στο πλέον ασύνηθες.

(i) Έστω f : Ñ $\to$ Ñ με $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

Αυτή είναι η γνωστή μας συνάρτηση $f(x) = |x| \ \forall x \in R$

(ii) Έστω g : Í $\to$ Ñ με $g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ περιττός} \\ 0, & x \text{ άρτιος} \end{cases}$

Η $g(x)$ είναι η n ακολουθία που συμβολίζεται συνήθως με

$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$ και η οποία έχει αναλυτική έκφραση $a_n = \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^n\right]$.

(iii) Η συνάρτηση του Dirichlet h : Ñ $\to$ Ñ με $h(x) = \begin{cases} \alpha, & x \text{ ρητός} \\ \beta, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$ $(\alpha \neq \beta)$

έχει την ακόλουθη εξεζητημένη αναλυτική έκφραση:

$$h(x) = \beta + (\alpha - \beta) \cdot \left[\lim_{n \to +\infty} \text{συν}^n (n! \pi x) \right].$$

Να περιγράψουμε όμως το γιατί:

Όταν x ρητός, γράφεται ως κλάσμα $\frac{p}{q}$, με ακέραιους όρους και $q \neq 0$. Τότε το γινόμενο $n!x$ είναι πάντα άρτιος ακέραιος για κάποια τιμή του n και πάνω (είναι **τελικά** άρτιος όπως λέμε) .

Άρα η παράσταση $n!\pi \cdot x$ είναι τελικά άρτιο πολλαπλάσιο του π. Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu^n(n!\pi \cdot x)$ είναι τελικά 1, συνεπώς και το $\left[\lim_{n\to+\infty} \sigma\upsilon\nu^n(n!\pi x)\right] = 1$.

Άρα, $f(x) = \beta + (\alpha - \beta)\cdot 1 = \alpha,\ \forall x \in$ Đ .

Αν x άρρητος, τότε η παράσταση $n!x \cdot \pi$ για κατάλληλα μεγάλο n, πλησιάζει ένα άρτιο ή περιττό πολλαπλάσιο του π, χωρίς να γίνεται ποτέ ίσο με αυτό. Τότε, όμως η παράσταση $\sigma\upsilon\nu^n(n!\pi \cdot x)$ πλησιάζει το 1 και το –1, αλλά ποτέ δεν γίνεται ίση μ' αυτά, ενώ γενικά ισχύει η ανισοταυτότητα $-1 \leq \sigma\upsilon\nu^n(n!\pi x) \leq 1$ Αν δεχθούμε, π.χ. ότι

$\sigma\upsilon\nu^n(n!x \cdot \pi) = 1 \Rightarrow (n!x\pi = 2\kappa\pi,\ \kappa \in$ Ù$) \Rightarrow (n!x = 2\kappa,\ \kappa \in$ Ù$) \Rightarrow$

$\left(x = \frac{2\kappa}{n!},\ \kappa \in\right.$ Ù$\left.\right) \Rightarrow x$ ρητός, άτοπο!

Άρα, $-1 < \sigma\upsilon\nu n!\pi \cdot x < 1$ ή $|\sigma\upsilon\nu n!\pi x| < 1,\ \forall \in$ Í .

Τότε, όμως το $\lim_{n\to+\infty} \sigma\upsilon\nu^n(n!\pi x) = 0$, αφού ως γνωστόν όταν $|y| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y^n = 0$.

Άρα, $f(x) = \beta + (\alpha - \beta)\cdot 0 = \beta,\quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(iv) Υπάρχουν κλαδικές συναρτήσεις, οι οποίες δεν είναι γνωστό ακόμη αν έχουν αναλυτική έκφραση. Μια τέτοια είναι η

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \in \mathbb{N} \text{ και } x \text{ πρώτος} \\ +1, & \text{αν } x \in \mathbb{N} \text{ και } x \text{ σύνθετος} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Αν βρεθεί τέτοια αναλυτική έκφραση, αυτό θα σημαίνει ότι έχει βρεθεί τύπος που να δίνει τους πρώτους αριθμούς, πράγμα πάρα πολύ δύσκολο και όπως υποψιάζονται οι αριθμοθεωρητικοί μαθηματικοί, μάλλον αδύνατο, αφού δεν έχει βρεθεί τύπος, ούτε για ειδικές περιπτώσεις πρώτων, παρ' όλες τις γιγαντιαίες προσπάθειες που έχουν καταβληθεί γι' αυτό από μέγιστους μαθηματικούς. Φυσικά τα προηγούμενα μπορούν να καταπέσουν αν βρεθεί ένας τύπος για τους

πρώτους, αφού ανάλογες «υποψίες» είχαν εκφρασθεί και για την τελευταία εικασία του Fermat που έπειτα από προσπάθειες αιώνων απεδείχθη από τον Wallis το 1996.

3.2. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να βρεθούν παραδείγματα συναρτήσεων με πεδίο ορισμού

α) Το κενό σύνολο

β) Μονοσύνολο

γ) Δισύνολο

δ) Άπειρο αριθμήσιμο σύνολο

ε) Άπειρο υπεραριθμήσιμο σύνολο

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) $f: f(x)=\sqrt{\text{ημx}-2}$. Για την f πρέπει $\text{ημ}x-2\geq 0$ που είναι αδύνατη ανίσωση. Άρα $\mathrm{D}(f)=\varnothing$.

Πρέπει όμως να σχολιασθεί, ότι η έννοια "συνάρτηση" έχει εξ ορισμού νόημα μόνο για μη κενό σύνολο ορισμού. Καταχρηστικά και οριακά εδώ δεχθήκαμε την έννοια «δεν ορίζεται συνάρτηση» ως ισοδύναμη της έννοιας «συνάρτηση με πεδίο ορισμού το κενό».

β) $g(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$. Πρέπει $(x-3\geq 0$ και $3-x\geq 0)\Leftrightarrow(x=3)$. Άρα $\mathrm{D}(g)=\{3\}$.

γ) $h(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2+3x-2}$. Πρέπει

$(x^2-3x+2\geq 0$ και $-x^2+3x-2\geq 0)\Leftrightarrow(x=3)\ [(x\leq 1$ ή $x\geq 2)$ και $(1\leq x\leq 2)]$

$\Leftrightarrow(x=1$ ή $x=2)$. Άρα $\mathrm{D}(h)=\{1,2\}$.

δ) $\varphi(x)=\sqrt{\text{ημ}x-1}$. Πρέπει

$$\text{ημ}x-1\geq 0\Leftrightarrow \text{ημ}x\geq 1\Leftrightarrow \text{ημ}x=1\Leftrightarrow\left(x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right).$$

Άρα $\mathrm{D}(\varphi)=\left\{2k\pi+\frac{\pi}{2}\right\},\ k\in\mathbb{Z}$ με άπειρο, αλλά αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων.

Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$\sigma : \mathbb{N} \to D(\varphi) \quad \text{με} \quad \sigma(n) = \begin{cases} 2\lambda\pi + \dfrac{\pi}{2}, & \text{αν} \quad n = 2\lambda \\ 2(\text{-}\lambda)\pi + \dfrac{\pi}{2}, & \text{αν} \quad n = 2\lambda + 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{αν} \quad n = 0 \end{cases}$$

η οποία είναι προφανώς “$1-1$” και “επί” και άρα $|D(\varphi)| = \aleph_0$.

ε) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$. Πρέπει $-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$. Άρα $D(f) = [2, 3]$, το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο και έχει την ισχύ του συνεχούς, $2^{\aleph}$.

2. Να βρεθεί αναλυτική έκφραση συνάρτησης με («μέγιστο») πεδίο ορισμού, οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμητικό σύνολο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ με $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $i = 1(1)k$. Τότε θεωρώ την *f*:

$$f(x) = \sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)} + \sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)}\,.$$

Εκ κατασκευής, οι υπόρριζες ποσότητες είναι ετερόσημες.

Εκεί όπου η μία γίνεται θετική, η άλλη γίνεται αρνητική και τούμπαλιν. Αφού απαιτούμε και για τις δύο να είναι μη αρνητικές, συναληθεύουν εκεί που μηδενίζονται, δηλ. στις κοινές ρίζες των υπορρίζων ποσοτήτων, που είναι οι $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Επομένως $D(f) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$.

3.3.ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ Η/Υ

1. Όταν μία συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού σύνολα της μορφής $(-\infty, +\infty)$, $(\alpha, +\infty)$, $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ κ.ο.κ. λόγω του απείρου μήκους των διαστημάτων ορισμού, μόνο ένα τμήμα των συναρτήσεων μπορούμε να απεικονίσουμε. Για τη συμπεριφορά στο $+\infty$ ή $-\infty$ ή *α* ή *β* έχουμε τις οριακές τιμές σε αυτά και τις ασύμπτωτες. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις οι οποίες δεν μπορούν να αποδοθούν γραφικά ούτε καν σε ένα μικρό υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους, ούτε τώρα, ούτε στο απώτατο μέλλον, από οιονδήποτε και οσοδήποτε εξελιγμένο Η/Υ. Να δοθούν παραδείγματα:

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$f : f(x) = \begin{Bmatrix} x & \text{αν} & x & \text{ρητός} \\ \text{-}x & \text{αν} & x & \text{άρρητος} \end{Bmatrix}$$

Γενικότερα $f : f(x) = \begin{Bmatrix} h(x) & \text{αν} & x & \text{ρητός} \\ g(x) & \text{αν} & x & \text{άρρητος} \end{Bmatrix}$ όπου h, g έχουν το πολύ αριθμήσιμα κοινά σημεία.(δεν εξετάζω για υπεραριθμήσιμα σημεία)

Γι' αυτές τις συναρτήσεις, οποιονδήποτε περιορισμό τους να σχεδιάσουμε π.χ. $f/[\alpha,\beta]$ με οσοδήποτε μικρό το $|\beta-\alpha|$ σε αυτό θα έχουμε άπειρες (αριθμήσιμες) τιμές για τους υπάρχοντες ρητούς και άπειρες (υπεραριθμήσιμες) τιμές για τους υπάρχοντες αρρήτους. Επομένως ουδείς Η/Υ είτε τώρα είτε στο απώτατο μέλλον δύναται να σχεδιάσει ικανοποιητικά.

3.4 . ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να δοθούν τρεις άπειρες οικογένειες συναρτήσεων που να είναι:
α) Άνω φραγμένες από τον $\lambda \in$ Ñ
β) Κάτω φραγμένες από τον k $\in$ Ñ
γ) Φραγμένες με $\lambda \le f(x) \le k$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Η οικογένεια των $f : f(x) = \alpha(x-\beta)^{2p} + \lambda,\ \alpha < 0$ είναι άνω φραγμένη από το λ, και μάλιστα έχει μέγιστο στη θέση $x = \beta$ το $f(\beta) = \lambda$.

β) Η οικογένεια των $g : g(x) = \alpha(x-\beta)^{2p} + k,\ \alpha > 0$ είναι κάτω φραγμένη από το k και μάλιστα έχει ελάχιστο στη θέση $x = 0$ το $f(\beta) = k$.

γ) Μια γνωστή οικογένεια φραγμένων συναρτήσεων είναι οι $f : (f(x) = \alpha \cdot \text{ημ}x + \beta$, $\alpha \in$ Ñ$_+$, $\alpha \in$ Ñ.

Επειδή $-1 \le \text{ημ}x \le 1\ \ \forall$x $\in$ Ñ, θα ισχύει $-\alpha + \beta \le \alpha\text{ημ}x + \beta \le \alpha + \beta\ \ (\alpha > 0)$.

Οπότε αν $\begin{Bmatrix} -\alpha + \beta = \lambda \\ \alpha + \beta = k \end{Bmatrix}$ έχω $\begin{Bmatrix} \alpha = \dfrac{k-\lambda}{2} \\ \beta = \dfrac{k+\lambda}{2} \end{Bmatrix}$ $(k > \lambda)$.

Δηλ. $f(x) = \dfrac{k-\lambda}{2}\text{ημ}x + \dfrac{\text{k}+\lambda}{2}$.

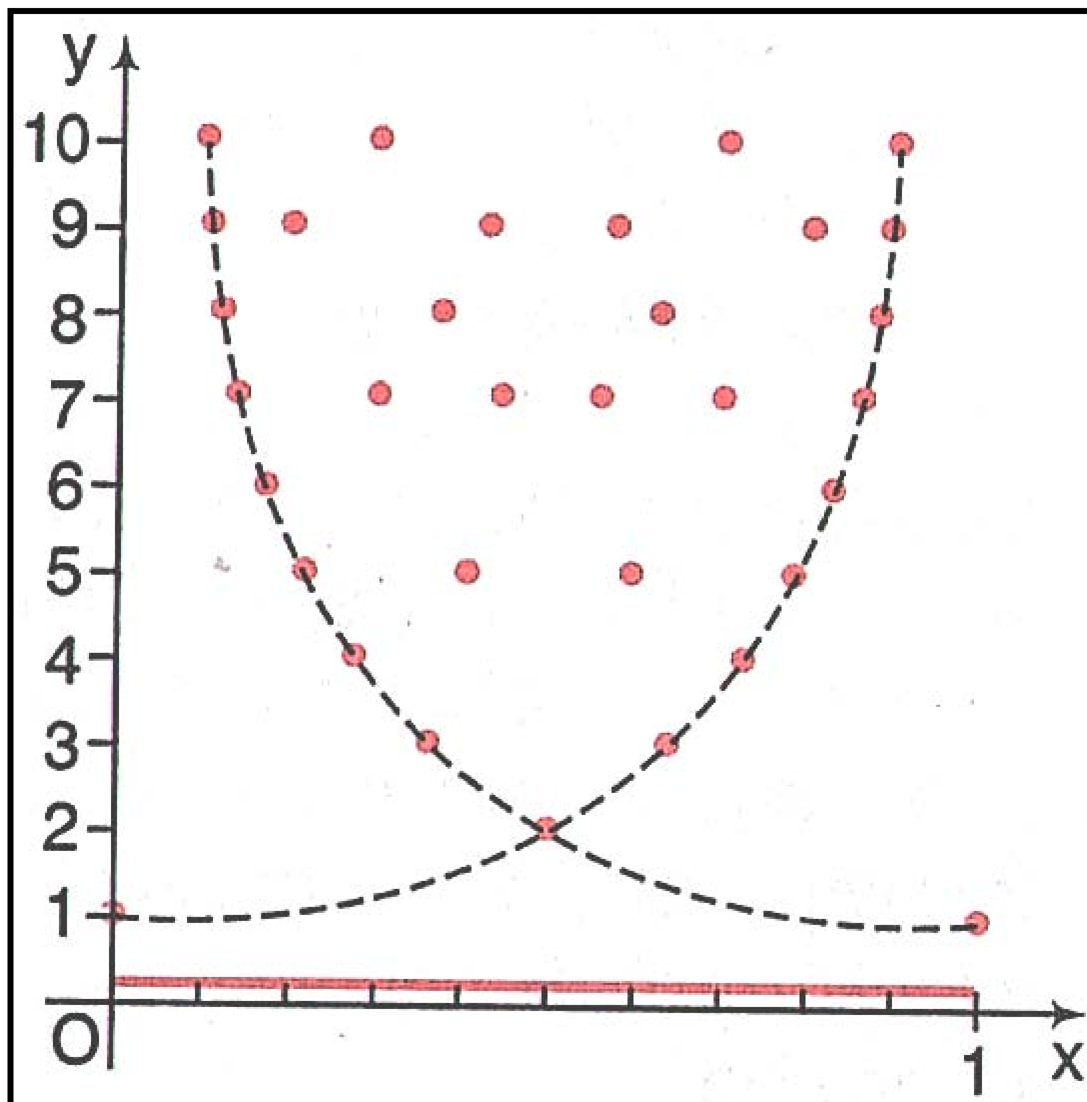
2. Να δοθεί παράδειγμα κάτω φραγμένης συνάρτησης σε διάστημα και της οποίας, οποιοδήποτε περιορισμός σε υποδιάστημα να μην είναι άνω φραγμένη συνάρτηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f:[0,1]\to R$:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \ \text{άρρητος} \\ n & \text{αν} \quad x=\dfrac{m}{n},\ m,n\in \text{Í} \quad \text{και} \quad (m,n)=1 \\ 1 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}.$$

Προφανώς είναι κάτω φραγμένη από το 0.

Η f δεν είναι άνω φραγμένη σε οποιοδήποτε διάστημα $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$. Θα το δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο.



Μια συμβατική γραφική παράσταση αυτής της "περίεργης" συναρτήσεως.

Έστω ότι η $f/[\alpha,\beta]$ είναι άνω φραγμένη από το $\varphi \in$ Ñ. Τότε $\exists$ n $\in$ Í $: n > \varphi$ και επίσης πρώτος $p : p > n$. Τελικά και το *p* είναι άνω φράγμα της $f/[\alpha,\beta]$ (1).

Επίσης $\exists$ πρώτος $p' > p$ με $p' > \dfrac{1}{|\beta-\alpha|} \Rightarrow |\beta-\alpha| > \dfrac{1}{p'}$. Τότε αν διαμερίσω το [0,1] σε ίσα διαστήματα πλάτους $\dfrac{1}{p'}$, τότε το $[\alpha,\beta]$ θα περιέχει ρητό της μορφής $\dfrac{\alpha}{p'}$, με $\alpha < p$ και $(\alpha,p)=1$ και $f\left(\dfrac{\alpha}{p'}\right) = p' > \varphi$ άτοπο.

Μια άλλη συνάρτηση που πληροί τις ίδιες προϋποθέσεις είναι η

$$f : f(x) = \begin{cases} n, & \text{αν το δεκαδικό ανάπτυγμα του } x \text{ περιέχει } n \text{ ακριβώς 5-άρια} \\ -1, & \text{αν το δεκαδικό ανάπτυγμα του } x \text{ περιέχει άπειρα 5-άρια.} \end{cases}$$

Και γι' αυτήν ισχύει, ότι ο περιορισμός της *f* σε οποιοδήποτε διάστημα $(\alpha,\beta) \subset$ Ñ οσοδήποτε «στενό» (δηλαδή $|\beta-\alpha|$ οσοδήποτε μικρό) η *f* δεν είναι άνω φραγμένη. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η $f/(\alpha,\beta)$ είναι φραγμένη άνω από το $\varphi \in$ Ñ, τότε υπάρχει $n' \in$ Í $: n' > \varphi$ και η $f/(\alpha,\beta)$ θα είναι φραγμένη άνω επίσης από το n'.

Πάντα υπάρχει ρητός $p \in (\alpha,\beta)$. Αν αυτός περιέχει στο ανάπτυγμα παραπάνω από n' πεντάρια, τότε έχω άτοπο.

Αν το ανάπτυγμα του *p* περιέχει λιγότερα από n' πεντάρια, τότε έχω τα παρακάτω:

- $\alpha < p < \beta$
- Προβαίνω στην παρακάτω περιγραφόμενη κατασκευή:
  Αρχίζω και αριθμώ τα ψηφία του *α* και του *p*, έως ότου συναντήσω το πρώτο μη κοινό τους ψηφίο στο ανάπτυγμα *p*, έστω το *t* (το *t* δεν μπορεί να είναι 0). Μειώνω το *t* κατά 1 και έχω το ψηφίο *t*–1.
- Συνεχίζω την αρίθμηση των ψηφίων του *α* έως ότου βρω το πρώτο ψηφίο του *α* που δεν είναι 9, έστω *κ*.(*) Αυξάνω το *κ* κατά μία μονάδα και έχω το ψηφίο *κ* + 1.
- Θεωρώ τον αριθμό p' που αποτελείται από το πρώτο κοινό μέρος των *α* και *p*, ακολουθεί το ψηφίο *t*–1, ακολουθεί το μέρος με τα (τυχόν) 9-άρια, το (*κ*+1) και τέλος προσθέτω $(n'+1)$ πεντάρια. Δηλαδή ο p' έχει την μορφή:

(*) **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Για να ισχύσουν τα ανωτέρω, το δεκαδικό ανάπτυγμα των αριθμών δεν επιτρέπεται να είναι στην μορφή με τα άπειρα 9-άρια. Αν κάποιος έχει άπειρα εννιάρια, τον μετατρέπουμε στην ίση μορφή του. Π. χ. 3,4569999…=3,45700000.

$$p' = \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n(t-1)9999...9(\kappa+1)\underbrace{555...5}_{n'+1}.$$

Ισχύει ότι $\alpha < p' < p < \beta$, διότι:

(i) Το ψηφίο $(t-1)$ τον καθιστά μικρότερο του p, ότι κι αν ακολουθεί.

(ii) Το μέρος $999...9(\kappa+1)$ τον καθιστά μεγαλύτερο του α

(iii)Η προσθήκη των $n'+1$ πενταριών δεν επηρεάζει την διάταξη του μεταξύ των α και p.

Τότε όμως θα έχω $f'(p) = n'+1$, άτοπο!

3.5. ΑΡΤΙΕΣ-ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. «Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που να είναι ταυτοχρόνως άρτιες και περιττές».Να εξετασθεί η αλήθεια ή μη του παραπάνω ισχυρισμού

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν A το πεδίο ορισμού μιας άρτιας και περιττής συνάρτησης, τότε, $\forall x \in A$, και $-x \in A$ και $f(x) = f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.

Από πρώτο και τρίτο μέλος έχω

$$f(x) = -f(x) \Leftrightarrow 2 \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Επίσης αν $f(x) = 0$ ***τότε*** $f(x) = f(-x)$**.**

Άρα η μηδενική συνάρτηση είναι η ζητούμενη.

Λέγοντας όμως «μηδενική συνάρτηση» κατά σύμβαση εννοούμε το ευρύτερο σύνολο στο οποίο αυτή ορίζεται δηλαδή το Ñ. Όμως θεωρώντας οποιοδήποτε σύνολο $A \subseteq$ Ñ που είναι συμμετρικό ως προς το 0 λαμβάνουμε μια άπειρη οικογένεια μηδενικών συναρτήσεων της μορφής

$$f : A \to \{0\} \quad \text{με} \quad f(x) = 0,$$

οι οποίες είναι περιορισμοί της μηδενικής δε συμμετρικά ως προς το 0 υποσύνολο του Ñ, οι οποίες θεωρούνται φυσικά ως διαφορετικές μεταξύ τους συναρτήσεις.

2. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης *f* έτσι ώστε να είναι ταυτοχρόνως περιοδική και μη περιοδική συνάρτηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Φυσικά και δεν υπάρχει τέτοιο «παράδειγμα» αφού αν υπήρχε θα παρεβίαζε την αρχή της αντίφασης της Αριστοτέλειας Λογικής.

Κάθε τι, ή είναι ή δεν είναι. Δεν μπορεί να είναι και τα δύο μαζί ή κάτι άλλο (Αρχή της του τρίτου ή μέσου αποκλίσεως).

Με μαθηματική ορολογία ακριβέστερα έχω:

Για κάθε πρόταση $P(A)$ ένα μόνο από τα δύο ακόλουθα θα συμβαίνει:

- Ή θα είναι αληθής ή $P(A)$
- Ή θα είναι αληθής ή $\neg\ P(A)$.

Εάν μπορεί να δημιουργηθεί κάποια συζήτηση για τέτοια θέματα θα συμβαίνει ένα τουλάχιστον από τα παρακάτω:

- Δεν αναφερόμαστε στην κλασική Δίτιμη Αριστοτέλεια Λογική
- Ο όρος «περιοδική συνάρτηση» δεν έχει το ίδιο περιεχόμενο στις δύο περιπτώσεις.

Υπάρχει ο εξής ορισμός στην βιβλιογραφία για τις περιοδικές συναρτήσεις:

ΟΡΙΣΜΟΣ Α: «Μια συνάρτηση θα λέγεται περιοδική, αν και μόνο αν υπάρχει ελάχιστη θετική περίοδός της.»

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό η σταθερή συνάρτηση f όπως και η συνάρτηση του Dirichlet $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \\ 0 & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \end{cases}$ δεν είναι περιοδικές αφού γι’ αυτές δεν υπάρχει ελάχιστη θετική περίοδος.

Πράγματι, αν $T \in$ Ñ για τη σταθερή συνάρτηση f έχω $\forall x \in$ Ñ, $x \pm T \in$ Ñ και $f(x \pm T) = f(x) = C$ όμως δεν υπάρχει ελάχιστη θετική περίοδος, αφού αν υπήρχε έστω T^* η ελάχιστη, τότε και η $\frac{T^*}{2}$ θα ήταν μια περίοδος για την οποία ισχύει $\frac{T^*}{2} < T^*$ άτοπο.

Επίσης κάθε ρητός αριθμός P είναι περίοδος της συνάρτησης του Dirichlet, αφού

$$g(x \pm \rho) = \begin{cases} 1 & (\text{Αν } x \text{ άρρητος, } \rho \text{ ρητός, τότε } x + \rho = \text{άρρητος}) \\ 0 & (\text{Αν } x \text{ ρητός, } \rho \text{ ρητός, τότε } x + \rho = \text{ρητός}) \end{cases} = g(x).$$

Προφανώς, ελάχιστος θετικός ρητός δεν υπάρχει, άρα κι’ αυτή δεν είναι περιοδική σύμφωνα με τον ορισμό Α.

Αν όμως δώσουμε τον συνήθη ορισμό είναι περιοδική (Συνήθης)

ΟΡΙΣΜΟΣ Β: Μια συνάρτηση θα λέγεται περιοδική αν υπάρχει $T \in$ Ñ*, έτσι ώστε $\forall x \in \mathrm{D}(f),\ x \pm T \in \mathrm{D}(f)$ και $f(x) = f(x - \tau) = f(x + \tau)$.

Ας σημειωθεί ότι μπορεί με κάποιον άλλο ορισμό να μην απαιτείται $x - T \in \mathrm{D}(f)$ για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού π.χ. το $(0,+\infty)$

3. Είναι γνωστό και μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι αν f / Ñ είναι περιοδική και παραγωγίσιμη, τότε f' / Ñ είναι επίσης περιοδική. Ισχύει το αντίστροφο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Γενικώς δεν ισχύει το αντίστροφο. α.χ. Έστω $f : f(x) = x + \eta\mu x$ $\forall x \in$ Ñ, η οποία δεν είναι περιοδική. Αν δεχθούμε ότι είναι, τότε θα υπάρχει $T \in$ Ñ*:

$$f(x+T) = f(x) \ \ \forall x \in \text{Ñ} \Rightarrow$$

$$x + T + \eta\mu(x+T) = x + \eta\mu, \ \ \forall x \in \text{Ñ} \Rightarrow$$

$$\eta\mu x - \eta\mu(x+T) = T, \ \ \forall x \in \text{Ñ} \Rightarrow$$

$$2\eta\mu\left(-\frac{T}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{T}{2}\right) = T, \ \ \forall x \in \text{Ñ} \Rightarrow \ (T \neq 0)$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{T}{2}\right) = \frac{T}{-2\eta\mu\frac{T}{2}}, \ \ \forall x \in \text{Ñ άτοπο},$$

διότι η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{T}{2}\right)$ δεν είναι σταθερή.

Επίσης $f'(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο $T = 2\pi$, αφού

$$f'(x+2\pi) = 1 + \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x = f'(x), \ \ \forall x \in \text{Ñ}.$$

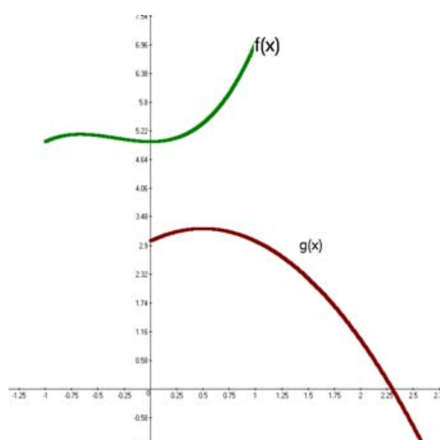
3.6 . ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Α. ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

α) Λαμβάνουμε ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων, το οποίο περιέχει μία τουλάχιστον δυάδα ζευγών της μορφής $(x_0, y_1),\ (x_0, y_2)$ με $y_1 \neq y_2$.

β) Λαμβάνουμε δύο συναρτήσεις $f : [\alpha, \beta] \to$ Ñ και $g : [\gamma, \delta] \to$ Ñ με $[\alpha,\beta] \cap [\gamma,\delta) \neq \varnothing$, $f(x) \neq g(x)\ \ \forall x \in [\alpha,\beta] \cap [\gamma,\delta]$ και ορίζουμε μία νέα σχέση, ως εξής:

$$h(x) = \begin{Bmatrix} f(x) & \text{αν} & x \in [\alpha,\beta] \\ g(x) & \text{αν} & x \in [\gamma,\delta] \end{Bmatrix}.$$



Η h δεν είναι συνάρτηση, αφού εξ' ορισμού, υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta] \cap [\gamma, \delta]$ και $f(x_0) \neq g(x_0)$. Δηλαδή για το ίδιο αρχέτυπο (το x_0) έχω δύο διαφορετικές εικόνες

γ) Με γραφική παράσταση

(i) Μια γραμμής που δεν μπορεί να παριστάνει συνάρτηση (δεν είναι ανάγκη να γνωρίζουμε την αναλυτική έκφρασή της)

(ii) Μιας γραμμής που δεν παριστάνει συνάρτηση και έχει γνωστή αναλυτική έκφραση (εξίσωση κύκλου, εξίσωση έλλειψης κ.ά.)

(iii) Κατασκευή με Βένια διαγράμματα σχέσεων που δεν είναι απεικονίσεις.

(iv) Κατασκευή οιουδήποτε σημειοσυνόλου που δεν είναι συνάρτηση (εσωτερικό γεωμ. σχημάτων κ.τ.λ.)

Β. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

α) ΓΝΩΣΤΕΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΜΟΡΦΕΣ

(i) *Πολυωνυμικές:* $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $n \in$ Í, $\alpha_i \in$ Ñ.

(ii) *Ρητές:* $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα.

(iii) *Άρρητες:* Όλες οι μορφές που περιέχουν την ανεξάρτητη μεταβλητή κάτω από ριζικό ή υπάρχει δύναμη ανεξάρτητης μεταβλητής με εκθέτη ανάγωγο κλάσμα.

(iv) *Εκθετικές:* Συναρτήσεις που περιέχουν δύναμη με την ανεξάρτητη μεταβλητή στον εκθέτη.

(v) *Λογαριθμικές:* Συναρτήσεις που περιέχουν λογάριθμο ανεξάρτητης μεταβλητής.

(vi) *Τριγωνομετρικές:* Είναι οι συναρτήσεις που περιέχουν ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα ή συντέμνουσα ανεξάρτητης μεταβλητής.

(vii) *Αντίστροφες Τριγωνομετρικές:* Οι αντίστροφες όλων των προηγούμενων τριγωνομετρικών: τοξ ημx, τοξ συν x, τοξ εφx, τοξ σφx, τοξ στεμx, τοξ τεμx.

(viii) *Οι υπερβολικές αντίστοιχες των τριγωνομετρικών:* Υπερβολικό ημίτονο (sinhx), υπερβολικό συνημίτονο (coshx), υπερβολική εφαπτομένη (tanhx), υπερβολική συνεφαπτομένη (cothx), υπερβολική τέμνουσα (sechx), υπερβολική συντέμνουσα (cschx).

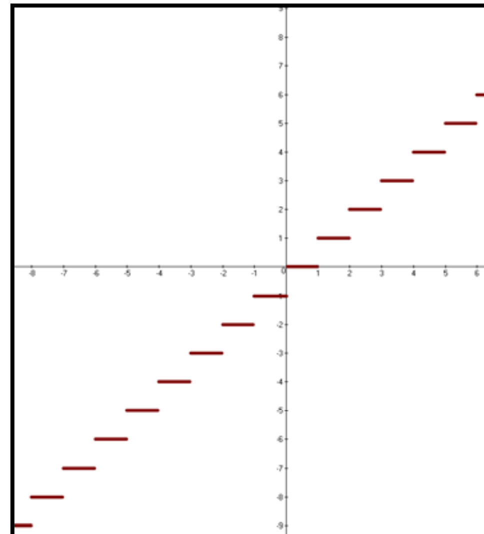
Ακολουθίες: Κάθε ακολουθία είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Í.

Κλαδικές συναρτήσεις*:* Συναρτήσεις που αποτελούνται από δύο ή περισσότερους κλάδους, κάθε ένας από τους οποίους είναι από μόνος του μια συνάρτηση.

Συναρτήσεις απόλυτης τιμής*:* Συναρτήσεις όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι εντός απολύτου τιμής. Συνήθως μετατρέπονται σε κλαδικές για να μελετηθούν.

Συνάρτηση ακεραίου μέρους*:* Συμβολίζουμε με $[x]$ και είναι «ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει το x» ή ισοδυνάμως «ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x».

Π.χ. $[-2]=-2$, $[-2{,}6]=-3$, $[-2{,}4]=-3$, $[-0{,}3]=-1$, $[3]=3$, $[2{,}6]=2$, $[0{,}3]=0$.



Ισχύουν οι ιδιότητες:

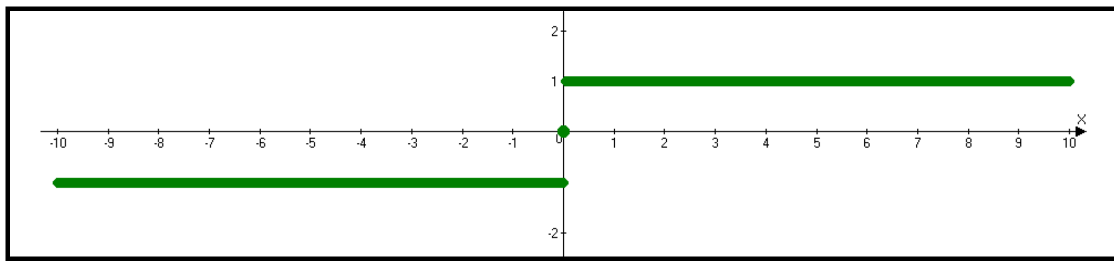
(i) $[x]\le x<[x]+1$

(ii) $x=[x]+\partial,\ \ 0\le\partial<1$

(iii) $$[x]=\begin{Bmatrix} \vdots & & \vdots \\ -\kappa & \text{αν} & x\in[-\kappa+1) \\ \kappa & \text{αν} & x\in[\kappa,\kappa+1) \\ \vdots & & \vdots \end{Bmatrix} \kappa\in \text{Í}.$$

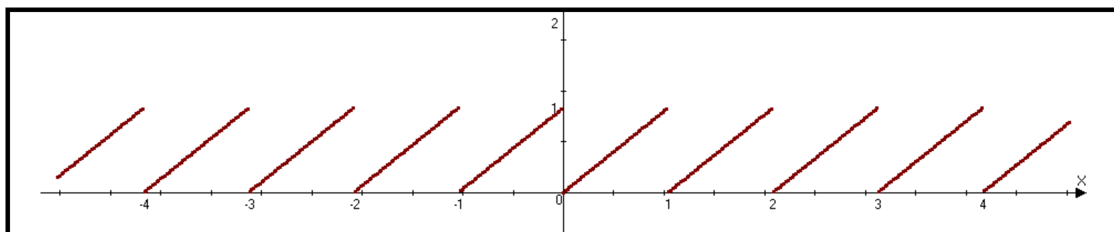
Συνάρτηση πρόσημο: Συμβολίζεται με το sgn από την λέξη signum (: πρόσημο)

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{Bmatrix} -1 & \text{αν} & x<0 \\ 0 & \text{αν} & x=0 \\ 1 & \text{αν} & x>0 \end{Bmatrix}.$$



Η συνάρτηση "πρόσημο"

Συνάρτηση δεκαδικό μέρος: Συμβολίζεται με $\{x\}$ $f(x)=\{x\}=x-[x]$ ισχύει ότι $0 \le \{x\} < 1$ $\forall x \in$ Ñ και $\{-2\}=0$, $\{-2{,}6\}=0{,}4$, $\{-0{,}3\}=0{,}7$, $\{2\}=0$, $\{2{,}6\}=0{,}6$, $\{0{,}3\}=0{,}3$.



Συνάρτηση του Dirichlet:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Πρόκειται για ένα ιστορικό αντιπαράδειγμα συναρτήσεως με πεδίο ορισμού το Ñ και πουθενά συνεχής.

Ουσιαστικά είναι το «πασπαρτού» των αντιπαραδειγμάτων. Κατατάσσεται στις «παράξενες» συναρτήσεις, αφού η εξέλιξη και η πρόοδος του Απειροστικού Λογισμού βασίστηκε στην μελέτη φυσικών φαινομένων που στην ολότητά τους περιγράφονται με συνεχείς συναρτήσεις ή τουλάχιστον κατά τμήματα συνεχείς. Αυτό ήταν πηγή αυθαιρέτων γενικεύσεων και λαθών της διαίσθησης στα οποία η συνάρτηση του Dirichlet τα αντιπαραδείγματα τις καταρρίπτει.

Από καθαρά μαθηματική άποψη είναι κι’ αυτή μια συνάρτηση όπως όλες οι άλλες, μόνο που δεν ανταποκρίνεται στο σύνηθες νοητικό υπόδειγμα που έχουν οι άνθρωποι (και οι μαθηματικοί) για το τι είναι συνάρτηση.

Σταθερή συνάρτηση: Είναι η συνάρτηση με τύπο $f: f(x)=c, \quad c \in$ Ñ.

Ομοπαραλληλική συνάρτηση: Έτσι αποκαλούμε την απλή πολυωνυμική $f: f(x)=\alpha x+\beta$ με $\alpha \le 0$, $\beta \le 0$.

Γραμμική συνάρτηση: Συνήθως έτσι αποκαλείται η $f : f(x) = \alpha \cdot x,\ \ \alpha \neq 0$.

Τριωνυμική: $f : f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \ \alpha \neq 0$.

Ομογραφική: $f : f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},\ \gamma \neq 0,\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Ας σημειωθεί ότι όλα τα προηγούμενα ονόματα των διαφόρων μορφών συναρτήσεων, αφορούν μορφές στις οποίες έχουν γίνει όλες οι αλγεβρικές αναγωγές.

β) ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ

(i) Με πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων $f \pm g$, , $\dfrac{f}{g}$ όπου αυτές ορίζονται

(ii) Με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων $f \circ g$ όπου αυτή ορίζεται

Γ. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΦΡΑΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) Εκμεταλευόμαστε την πρόταση:
«Αν $f_1 : A_1 \to B$ και $f_2 : A_2 \to B$ με $A_1 \cap A_2 = A \leq \varnothing$ είναι φραγμένες στο A, τότε και οι
   - (i) $f_1 + f_2$ είναι φραγμένη στο A
   - (ii) $f_1 \cdot f_2$ είναι φραγμένη στο A
   - (iii) $\alpha \cdot f_1$, $\alpha \in$ Ñ, είναι φραγμένη στο A».

2) Ομοίως εκμεταλευόμαστε την πρόταση:
«Αν η f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f φραγμένη στο $[\alpha, \beta]$».

Δ. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΡΤΙΩΝ-ΠΕΡΙΤΤΩΝ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΑΡΤΙΕΣ :

α) Παίρνουμε μία τυχαία συνάρτηση f με συμμετρικό ως προς το 0 πεδίο ορισμού και σχηματίζουμε την συνάρτηση $g : g(x) = f(x) + f(-x)$ που είναι πάντα άρτια.

β) Το γινόμενο δύο αρτίων συναρτήσεων είναι μια νέα άρτια συνάρτηση.

γ) Το άθροισμα ή η διαφορά δύο αρτίων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

δ) Αν η f είναι άρτια, τότε και η $|f|$ είναι άρτια.

ε) Αν $g \mid A$, όπου A συμμετρικό ως προς το 0 σύνολο, $f \mid$Ñ και g άρτια, τότε η $f \circ g$ είναι άρτια.

στ) Αν $g \mid A$, όπου A συμμετρικό ως προς το 0 σύνολο, g περιττή, $f \mid$Ñ άρτια, τότε $f \circ g$ άρτια.

ζ) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση της οποίας οι εκθέτες όλων των δυνάμεων του x είναι άρτιοι, είναι άρτια.

η) Αν f περιττή και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, τότε η f' είναι άρτια.

ΠΕΡΙΤΤΕΣ

α) Παίρνουμε μία τυχαία συνάρτηση f με συμμετρικό ως προς το 0 πεδίο ορισμού και σχηματίζουμε την συνάρτηση $g : g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, που είναι πάντα περιττή.

β) Το άθροισμα ή η διαφορά δύο περιττών συναρτήσεων είναι περιττή συνάρτηση.

γ) Το γινόμενο άρτιας επί περιττή συνάρτηση, δίνει περιττή συνάρτηση.

δ) Αν η f είναι περιττή συνάρτηση και “$1-1$”, τότε η f^{-1} και η οποία είναι επίσης περιττή.

ε) Αν $g \mid A$, περιττή και $f \mid$Ñ περιττή, τότε $f \circ g \mid A$ είναι περιττή.

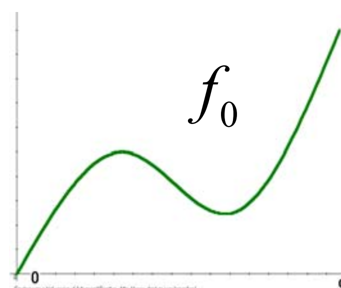
στ) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση με περιττούς εκθέτες των δυνάμεων του x, είναι περιττή συνάρτηση.

ζ) Αν f είναι άρτια συνάρτηση και παραγωγίσιμη, στο πεδίο ορισμού της, τότε η f' είναι περιττή.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ

α) Θεωρούμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση $f_0 / A_0 = [0, \alpha)$ η οποία έχει το παρακάτω γράφημα: f_0

Από την f_0, με επαγωγικό τρόπο, μπορώ να παράγω τις συναρτήσεις:



$$f_n(x) = f_0(x - n\alpha) / A_n = [n\alpha, (n+1)\alpha)$$
$$f_{-n}(x) = f_0(x + n\alpha) / A_{-n} = [-n\alpha, (-n+1)\alpha)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f_n, f_{-n} προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά κατά τον άξονα xx' της γραφικής παράστασης f_0 κατά $n \cdot \alpha$ δεξιά ή αριστερά, αντιστοίχως.

Τελικά η συνάρτηση f |Ñ που έχει κλάδους τις συναρτήσεις $f_\kappa \mid A_\kappa = [\kappa\alpha, (\kappa+1)\alpha)$, $\kappa \in$ Ù είναι περιοδική με περίοδο α.

β) Αν η $f \mid A$, είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο $T > 0$, $\alpha > 0$, και $\beta \in$ Ñ, τότε η συνάρτηση $g : g(x) = f(\alpha x - \beta)$ στο πεδίο ορισμού της $A_g = \left\{ x \in \text{Ñ} : \exists y \in A_f : x = \dfrac{y + \beta}{\alpha} \right\}$ είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο $\dfrac{T}{\alpha}$.

γ) Από ειδικές περιπτώσεις γνωστών περιοδικών συναρτήσεων:

(i) $f : f(x) = \alpha\text{ημ}(\beta x + \gamma) + \delta$ έχει πρωτεύουσα περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$ $(\beta > 0,\ \alpha \neq 0)$.

(ii) $g : g(x) = \alpha\text{συν}(\beta x + \gamma) + \delta$ έχει πρωτεύουσα περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$ $(\beta > 0,\ \alpha \neq 0)$.

(iii) $h : h(x) = \alpha \cdot \text{εφ}(\beta x + \gamma) + \delta$ έχει πρωτεύουσα περίοδο $T = \dfrac{\pi}{\beta}$ $(\beta > 0,\ \alpha \neq 0)$.

(iv) $\varphi : \varphi(x) = \alpha \cdot \text{σφ}(\beta x + \gamma) + \delta$ έχει πρωτεύουσα περίοδο $T = \dfrac{\pi}{\beta}$ $(\beta > 0,\ \alpha \neq 0)$.

(v) $\{\ \} : \{x\} = \alpha x - [\alpha x] + \beta,\quad \alpha > 0$, $\beta \in$ Ñ είναι περιοδική με πρωτεύουσα περίοδο $T = \dfrac{1}{\alpha}$.

δ) Αν f |Ñ είναι "$1-1$" και $g \mid A_g$ περιοδική, τότε και η $f \circ g \mid A_g$ είναι περιοδική.

ε) Αν . f |Ñ τότε και η f' |Ñ περιοδική

4. ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

4.1. ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΙ ΜΗ ΥΠΑΡΞΗ ΟΡΙΟΥ

1. Να παρατεθούν εκφράσεις με όρια, οι οποίες στερούνται νοήματος ορίου, λόγω μορφής του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}$

Η έκφραση $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2-x+1}-x\right)$, $\alpha<0$ δεν έχει νόημα ορίου, διότι το τριώνυμο αx^2-x+1 έχει διακρίνουσα $\Delta=1-4\alpha>0$ άρα έχει δύο διακεκριμένες ρίζες πραγματικές , ρ_1, ρ_2, και η συνάρτηση έχει π.ο. $\mathcal{D}(f)=[\rho_1,\rho_2]$. Το -∞ δεν είναι σ.σ. του $D(f)$, άρα δεν έχει νόημα ορίου η έκφραση $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2-x+1}-x\right)$, $\alpha<0$.

β) Αν $f:[\alpha,+\infty)\to$ Ñ με $f(x)=\sqrt{x-a}$,

τότε: η έκφραση $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ δεν έχει νόημα, διότι το -∞ δεν είναι σ.σ. του $D(f)$.

γ) Αν $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-3x+2}$, τότε για να ορίζεται η συνάρτηση , πρέπει $(x-1\geq 0)$ και $x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\{1\}\cup[2,+\infty)=D(f)$.

Η έκφραση $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ στερείται νοήματος, διότι το 1 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της.

δ) Αν $f(x)=\log\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$. Η έκφραση $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ επίσης στερείται νοήματος, διότι $D(f)=(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$και το 1 δεν ανήκει στο πεδίο του ορισμού της.

2. Ένας φοιτητής που προγυμνάζει έναν υποψήφιο , του δίνει την εξής ρητή οδηγία: «Πριν ασχοληθούμε με τον υπολογισμό ενός ορίου του τύπου $x\to a\in\mathbb{R}$, η πρώτη μας δουλειά είναι να δοκιμάσουμε αν υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης για χ=α . Τότε υπάρχει σίγουρα το όριο!»
Κατά πόσον είναι εύστοχη η υπόδειξή του;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Είναι λανθασμένη. Η πρώτη μας δουλειά είναι να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το κατά πόσον το α είναι ή όχι σ.σ. του πεδίου ορισμού της f .

Στην περίπτωση γ) του προηγούμενου ζητήματος, για χ=1 έχω f(x)=0. Παρ΄ όλα αυτά, ο όριο της f στο 1 , δεν έχει νόημα.

3. Να παρατεθούν παραδείγματα ορίων, για οποία να έχει νόημα η κατ' αρχήν αναζήτησή τους, αλλά τα οποία τελικώς να μην υπάρχουν.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Για την $f(x)=\begin{cases} ημ\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ **θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει τελικά** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**.**

Παρατηρούμε ότι $D(f)\in$ Ñ και το 0 είναι σ.σ. του $D(f)$, άρα έχει νόημα κατ' αρχήν η αναζήτηση του ορίου.

Θεωρώ τις ακολουθίες $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$ και $x_n'=\dfrac{2}{(1+4n)\pi}$.

Ισχύει ότι $x_n\to 0$ και $x_n'\to 0$.

Όμως, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} ημ\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty} ημ(n\pi)=0$ και

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=\lim\limits_{n\to\infty} ημ\dfrac{1}{x_n'}=\lim\limits_{n\to\infty} ημ\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$

Δηλαδή, $\lim f(x_n)\neq \lim f(x_n')$ και επομένως το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. Επίσης, η συνάρτηση ημ$\dfrac{1}{x}$ ως φραγμένη, δεν μπορεί να έχει όρια τα +∞ ή -∞.

β) Για τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -1, & αν\ x<1 \\ 1, & αν\ x>1 \end{cases}$ **δεν υπάρχει το όριο της στο** ***x=1*****.**

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$, τότε $\forall\varepsilon>0$, υπάρχει

$\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $x\in(1-\delta,1+\delta)$, $x\neq 1$, τότε $|f(x)-1|<\varepsilon$. (1)

Αν $x>1$, τότε η (1) δίνει $|1-l|<\varepsilon$. (2)

Αν $x<1$, τότε η (1) δίνει $|-1-l|<\varepsilon$. (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) έχω:

$2=|1-l+1+l|\leq|1-l|+|1+l|=|1+l|+|-1-l|<2\varepsilon\Rightarrow$

$2<2\varepsilon\Rightarrow$

$\varepsilon>1$

Η τελευταία σχέση, θα έπρεπε να ισχύει $\forall\varepsilon > 0$, όμως αυτό δεν συμβαίνει π.χ. για $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Επομένως, η $f(x)$ δεν έχει πεπερασμένο όριο στο 1.

Επιπλέον είναι και φραγμένη προφανώς, αφού $-1 \le f(x) \le 1$.

Άρα, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$.

γ) Το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\text{ημ}\frac{1}{x}$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}\text{ημ}\frac{1}{x}$ θεωρείται ότι δεν έχει όριο στο 0, (σύμφωνα με την άρνηση του ορισμού σύγκλισης στο 0) όταν «$\exists\,\varepsilon > 0$: σε κάθε διάστημα του μηδενός να υπάρχουν x_1, x_2 που να ανήκουν σε περιοχή του μηδενός , και $|f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon$.

Αν θεωρήσω ως διάστημα του μηδενός της μορφής $(\alpha,0)\cup(0,\beta) = \mathrm{D}$ και $x_1 = \frac{1}{2\pi n}, x_2 = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, με n κατάλληλα μεγάλο ώστε $x_1, x_2 \in \mathrm{D}$, οσοδήποτε μικρές και να είναι οι απόλυτες τιμές των α, β , τότε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\cdot\text{ημ}\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) - \frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}\cdot\text{ημ}\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}\right)\right| =$$

$$= \left|2\pi n\cdot\text{ημ}(2\pi n) - \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{ημ}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|0 - \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right| =$$

$$= \left|2\pi n + \frac{\pi}{2}\right| = |\pi|\cdot\left|\frac{4n+1}{2}\right| \ge \frac{4\cdot 1 + 1}{2} = \frac{5\pi}{2}.$$

Οπότε αρκεί να θεωρήσω ως ε το $\frac{5\pi}{2}$ και άρα το όριο της $f(x)$ στο 0 δεν υπάρχει.

δ) Το $\lim_{x\to +0}\text{εφ}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Πράγματι, αν θεωρήσω τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$ και $x_n' = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{4}} \to 0$, τότε

$$f(x_n) = \text{εφ}\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \text{εφ}2\pi n = 0 \to 0$$

$$f(x_n') = \text{εφ}\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{4}} = \text{εφ}\left(2\pi n + \frac{\pi}{4}\right) = \text{εφ}\frac{\pi}{4} = 1 \to 1.$$

Δηλαδή, $\lim f(x_n) = 0 \neq 1 = \lim f(x_n')$, επομένως η έκφραση $\lim\limits_{x \to +0} \text{εφ}\frac{1}{x}$ στερείται νοήματος πραγματικού αριθμού ή να είναι +∞ ή να είναι -∞.

ε) **Η συνάρτηση $f(x) = \text{συνx}$, δεν έχει όριο στο +∞.**

Πράγματι, αν $x_n = 2n\pi \to +\infty, x_n' = (2n+1)\pi \to +\infty$.

Τότε, $f(x_n) = \text{συν}2n\pi = 1 \to 1$

$$f(x_n') = \text{συν}(2n+1)\pi = -1 \to -1.$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to +0} \text{συν}x$.

Ομοίως και όταν $x \to -\infty$.

4. Να δοθεί ένα παράδειγμα συνάρτησης $f : Ñ \to Ñ$ για την οποία υπάρχει μόνο μία οριακή τιμή σε ένα σημείο του πεδίου του ορισμού της.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω: $f : Ñ \to Ñ$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1\text{-}x, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Τότε η f έχει όριο στο $x_0 = \frac{1}{2}$, και μάλιστα $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$ και δεν έχει όριο σε κανένα άλλο σημείο του $\mathbb{R}$

Πράγματι, με το ακολουθιακό ορισμό της συγκλίσεως θα έχω:

Έστω, $x_n \in Ñ$ και $x_n \to \frac{1}{2}$, με $x_n \neq \frac{1}{2}$ $\quad \forall n \in Í$.

Τότε $$\left| f(x_n) - \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} \left| x_n - \frac{1}{2} \right|, & \text{αν } x_n \text{ ρητοί όροι} \\ \left| 1 - x_n - \frac{1}{2} \right|, & \text{αν } x_n \text{ ρητοί} \end{cases} = \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \quad \forall x_n \in \mathbb{R}$$

Θέτοντας $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ και επιλέγοντας $\forall \varepsilon > 0 \quad \delta = \varepsilon$ ικανοποιείται ο ορισμός της σύγκλισης στο $\frac{1}{2}$ και όριο είναι το $\frac{1}{2}$.

Για κάθε άλλο σημείο $x_0 \neq \frac{1}{2}$ με $x_0 \in$ Ñ μπορώ πάντα να βρίσκω ακολουθία ρητών, έστω x_n, που να συγκλίνει στο x_0.

Δηλαδή, $x_n \to x_0$, τότε και $f(x_n) = x_n \to x_0$. (1)

Επίσης, μπορώ να βρίσκω ακολουθία αρρήτων, έστω $x_n^{'}$ που να συγκλίνει στο x_0.

Δηλαδή, $x_n \to x_0$, τότε και $f\left(x_n^{'}\right) = 1 - x_n^{'} \to 1 - x_0$ (2)

και από (1), (2) έχω $x_0 \neq 1 - x_0 \Leftrightarrow x_0 \neq \frac{1}{2}$.

Δηλαδή, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, όταν $x_0 \neq \frac{1}{2}$.

5. Υπάρχει συνάρτηση $f :$ Ñ $\to$ Ñ η οποία δεν έχει οριακή τιμή σε κανένα σημείο του D(f);

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f :$ Ñ $\to$ Ñ : $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$

Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to \xi} f(x), \xi \in$ Ñ.

Πράγματι, αν $\xi \in$ Ñ τότε πάντα υπάρχει ακολουθία ρητών (x_n), και ακολουθία αρρήτων ($x_{n'}$) που συγκλίνουν στον ξ. Δηλαδή,

$x_n \to \xi, \quad x_n \neq \xi \quad \forall n \in$ Í, $\quad x_n^{'} \to \xi, x_n^{'} \neq \xi \quad \forall n \in$ Í.

Τότε, $f(x_n) = 1 \to 1$.

Τότε, $f\left(x_n^{'}\right) = 0 \to 0$.

Άρα, $\nexists \lim\limits_{x \to \xi} f(x), \xi \in$ Ñ.

6. Ένας φοιτητής της Πληροφορικής εκθέτει σε φίλο του φοιτητή των Μαθηματικών ένα πρόγραμμα υπολογισμού ορίων συναρτήσεων της μορφής $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Σύμφωνα με αυτό (χονδρικά) έχουμε:

(i) Αν το x_0 δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως του $\mathrm{D}(\mathrm{f})$, τυπώνει «Δεν έχει νόημα το όριο».

(ii) Αν το x_0 είναι σ.σ. του $\mathrm{D}(\mathrm{f})$ και $x_0 \in \mathrm{D}(\mathrm{f})$, το πρόγραμμα υπολογίζει το $f(x_0)$ και το τυπώνει ως όριο.

(iii) Αν το x_0 είναι σ.σ. του $\mathrm{D}(\mathrm{f})$, $x_0 \notin \mathrm{D}(\mathrm{f})$ και $x_0 \in Ñ$, το πρόγραμμα υπολογίζει το $f(x_0-\alpha)$ και $f(x_0+\alpha)$, όπου $\alpha = 10^{-200}$ και με την προϋπόθεση ότι έχουν και οι δύο τιμές νόημα. Αν είναι και οι δύο ίσες (με κάποια προσέγγιση) και αν είναι μεταξύ κάποιων προκαθορισμένων φραγμάτων φ και $-\varphi$ (φ>0) τυπώνει το $f\left(x_0 \pm \alpha\right)$ ως το (κατά προσέγγιση) όριο. Αν όμως είναι οι τιμές μεγαλύτερες από κάποιο φράγμα θ (θ>0) ή μικρότερες από κάποιο $-\theta$ (θ>0), τυπώνει την ένδειξη «+∞» ή «-∞» αντιστοίχως, ενώ όταν οι τιμές $f(x_0+\alpha)$, $f(x_0-\alpha)$ διαφέρουν πάνω από ένα προκαθορισμένο φράγμα σ, τυπώνει ανάλογες ενδείξεις αν στο x_0^+ είναι πεπερασμένο ή άπειρο και στο x_0^+ πεπερασμένο ή άπειρο. (Δεν μας ενδιαφέρουν λεπτομέρειες σε αυτό το κομμάτι του προγράμματος).

(iv) Αν το x_0 είναι σ.σ. του $\mathrm{D}(\mathrm{f})$, $x_0 \notin \mathrm{D}(\mathrm{f})$ και $x_0 \notin Ñ$, (δηλαδή το x_0 είναι +∞ ή -∞) τότε όταν $x \to +\infty$, το πρόγραμμα υπολογίζει την $f\left(10^{200}\right)$ και $f(x_0+\alpha)$, και αν τη βρει «πολύ μεγάλη» (δηλαδή μεγαλύτερη από ένα εκ των προτέρων φράγμα) τυπώνει «+∞». Ομοίως για το -∞ υπολογίζει την $f\left(-10^{200}\right)$ και αποφαίνεται αναλόγως.

Ο φίλος του φοιτητή των Μαθηματικών, του είπε ότι το πρόγραμμά του είναι μάλλον για τον σκουπιδοτενεκέ, ότι χρειάζεται διόρθωση γενναία, παραθέτοντάς του αντιπαραδείγματα. Προσέθεσε μάλιστα, ότι όταν $x_0 \pm \infty$ ή $f(x) \to \pm\infty$ ποτέ δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι.
Μπορείτε εσείς να παραθέσετε αντιπαραδείγματα και να υποδείξετε τις «τρύπες» και τα αδύνατα σημεία του προγράμματος;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Τα (i) και (ii) είναι άψογα, αλλά τα προβλήματα αρχίζουν μετά.

Για το (iii). Αν $f(x)=\eta\mu\frac{1}{x}\,/\,\text{Ñ}-\{0\}$ και θέλω να υπολογίσω το $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu\frac{1}{\text{x}}$, τότε αυτό δεν υπάρχει (   ). Οι τιμές $f\left(0-10^{-200}\right)$ και $f\left(0+10^{-200}\right)$ θα βρεθούν ίσες και μάλιστα ανάμεσα στο –1 και 1.

Έτσι το πρόγραμμα αποτυγχάνει παταγωδώς. Για μια κάποια διόρθωση, μπορεί να προταθεί να υπολογίζονται πολύ περισσότερες τιμές, μάλιστα μη συμμετρικές ως προ το x_0, δηλαδή $f\left(x_0-10^{-21}\right), f\left(x_0-10^{-31}\right), f\left(x_0-10^{-41}\right),\ldots, f\left(x_0-10^{-191}\right)$ και $f\left(x_0+10^{20}\right), f\left(x_0+10^{30}\right), f\left(x_0+10^{40}\right),\ldots, f\left(x_0+10^{200}\right)$ και μόνο αν είναι όλες «κοντά» σε κάποιον πραγματικό να αποφαίνεται το πρόγραμμα ότι συγκλίνει σε αυτόν, αλλιώς να εκτυπώνει ότι «δεν υπάρχει το όριο». Για τις περιπτώσεις $x\to x_0^+, x\to x_0^-$ μπορούν να γίνουν ανάλογες προσαρμογές.

Για την περίπτωση (iv) παρατίθεται το εξής αντιπαράδειγμα:

$f(x)=\eta\mu x\,/\,\text{Ñ}$, το $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\frac{1}{\text{x}}$ δεν υπάρχει, αλλά το $f\left(10^{20}\right), f\left(10^{30}\right),\ldots, f\left(10^{200}\right),$ και μόνον όταν «πλησιάζουν» σε κάποια τιμή «πολύ κοντά» να τυπώνει το πρόγραμμα ότι υπάρχει το όριο, αλλιώς να τυπώνει «δεν υπάρχει» (ούτε τώρα είναι απολύτως ασφαλές το συμπέρασμα).

Επίσης, αν $g(x)=x^2\eta\mu\frac{1}{x}$, το $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\eta\mu\frac{1}{\text{x}}$ δεν υπάρχει.

Το $g\left(10^{200}\right)$ μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ -10^{400} και $+10^{400}$.

Επομένως, και εδώ πρέπει να υιοθετηθεί από το πρόγραμμα ο υπολογισμός περισσότερων τιμών, δηλαδή να πάρουμε μια (πεπερασμένη αναγκαστικά) ακολουθία που να «τείνει» στο $+\infty$ π.χ. 10^{10}, 10^{20}, 10^{30},…10^{200} και να εξετάσουμε τις αντίστοιχες τιμές $f\left(10^{10}\right)$, $f\left(10^{20}\right)$, ..., $f\left(10^{200}\right)$ και να αποφανθούμε αναλόγως.

Γενικώς, ο Η/Υ λειτουργεί με πεπερασμένες πράξεις και με όριο υπολογισμού, όσον αφορά το πλήθος ψηφίων. Άρα με μια τέτοια λογική, πάντα θα υπάρχουν αντιπαραδείγματα που θα ξεφεύγουν από το πρόγραμμα, α.χ. αν πάρω την $h(x)=10^{-400}\cdot\eta\mu x$ και προσπαθήσω να υπολογίσω το $\lim\limits_{x\to+\infty}10^{-400}\eta\mu x$, τότε το $h\left(10^{200}\right)$ θα είναι μια τιμή μεταξύ -10^{400}, $+10^{-400}$ και μπορεί να θεωρηθεί ως 0, ενώ ούτε αυτή συγκλίνει. Αν αντί για μια τιμή υπολογίσει ο Η/Υ πολλές, πάλι θα καταλήγει σε νούμερα κοντά στο 0 και εύκολα μπορεί να αποφανθεί ψευδώς για τη σύγκλιση, αφού πάντα θα έχει όριο, όπου όταν οι διαφορές μεταξύ των τιμών της συνάρτησης της πεπερασμένης ακολουθίας θα γίνονται αρκούντως μικρές (όριο Η/Υ) να «αποφαίνεται» (ψευδώς φυσικά).

Το καλύτερο για ένα τέτοιο πρόγραμμα είναι να αναγνωρίζει τις συναρτήσεις, να έχει μια βάση δεδομένων ισχυρή (με έτοιμα όρια, γνωστών συναρτήσεων) να μπορεί να εφαρμόζει τον κανόνα του D' Hospital και ουσιαστικά να «μιμείται» τον υπολογισμό που κάνει ένας άνθρωπος πράγμα που είναι κατορθωτό ήδη από εξελιγμένα επί τούτω προγράμματα (Mathematica 4).

7. Να εξετασθεί αν ο παρακάτω ορισμός της σύγκλισης είναι ισοδύναμος με έναν αντίστοιχο κλασσικό ορισμό της σύγκλισης: «$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$» εάν και μόνο εάν «Υπάρχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ακολουθιών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to x_0, x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, για τις οποίες ισχύει $f(x_n) \to \ell$»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι λανθασμένος και θα αποδείξουμε την αναλήθεια με αντιπαράδειγμα.

Θεωρώ $f : f(x) = ημ\frac{1}{x}$ / Ñ $-\{0\}$.

Αναζητώ το όριο $\lim_{x\to 0} ημ\frac{1}{x}$.

Υπάρχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ακολουθιών της μορφής $x_{n,\alpha} = \frac{\alpha}{n\cdot\pi}, \alpha \in (0,1)$.

Επειδή το πλήθος των στοιχείων του (0,1) είναι υπεραριθμήσιμο και οι ακολουθίες $x_{n,\alpha}$ είναι υπεραριθμήσιμες.

Για όλες ισχύει $x_{n,\alpha} \to 0$ και $x_{n,\alpha} \neq 0 \quad \forall n \in$ Í.

Επίσης, $f(x_{n,\alpha}) = ημ\frac{1}{\frac{\alpha}{n\pi}} = ημ n\pi = 0 \to 0$.

Όμως $\nexists$ το $\lim_{x\to 0} ημ\frac{1}{x}$, αφού υπάρχει ακολουθία $(y_n) : y_n = \frac{2}{(1+4n)\pi} \to 0$, $y_n \neq 0 \quad \forall n \in$ Í και $f(y_n) = ημ\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$. Δηλαδή, $f(x_n) \not\to 0$ για κάθε ακολουθία, όπως απαιτεί ο κλασσικός ορισμός.

8. Να δοθεί κατάλληλο παράδειγμα, από το οποίο να φαίνεται, ότι ο ακολουθιακός ορισμός του ορίου κατά Heine σε σχέση με τον «ε, δ» ορισμό κατά Cauchy έχει ισχυρό και ουσιώδες πλεονέκτημα και άρα θα πρέπει να συνυπάρχει κι αυτός παράλληλα και συμπληρωματικά στα εγχειρίδια ή συγγράμματα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η ουσιώδης διαφορά των δύο ορισμών είναι η εξής:

- Ο «ε, δ» ορισμός απαιτεί την εκ των προτέρων γνώση του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, αλλιώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί.
- Ο ακολουθιακός ορισμός δεν απαιτεί την εκ των προτέρων γνώση του $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Συνεπώς, σε θέματα που δεν γνωρίζουμε το όριο της συνάρτησης ή δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε με απλή αντικατάσταση (για τις συνεχείς συναρτήσεις σε σ.σ. του Π.Ο. τους) ο ακολουθιακός ορισμός παρουσιάζει πλεονέκτημα.
Το παράδειγμα:

«Να υπολογισθεί ο όριο $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$ αν υπάρχει».

Σε μια τέτοια διατύπωση:

- Δεν μας δίδουν την οριακή τιμή.
- Δεν μπορούμε να την υπολογίσουμε με αντικατάσταση αφού $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και η συνάρτηση για x=0 δεν έχει νόημα.
- Το να θέσουμε μια τιμή κοντά στο μηδέν και να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης είναι παρακινδυνευμένο και εν πάση περιπτώσει μόνο ως εικασία έχει χρησιμότητα.

  Έτσι, θεωρούμε x_n ακολουθία, με $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0 \quad \forall n \in$ Ί. Ως τέτοια επιλέγουμε την $x_n = \frac{1}{n}$.

  Τότε $f(x_n)=\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{n}}\right]=\frac{1}{n}\cdot[n]=\frac{n}{n}=1\to 1$.

  Τι συμπέρασμα βγαίνει τώρα;

  «Αν υπάρχει το όριο, τότε αυτό θα είναι 1».

  Με αυτό το δεδομένο, μπορούμε τώρα να εξετάσουμε αν εφαρμόζεται ο «ε, δ» κατά Cauchy ορισμός, δηλαδή $\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta>0:0<|x|<\delta \Rightarrow \left|x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]-1\right|<\varepsilon.$

  Από τον ορισμό της συνάρτησης του ακεραίου μέρους έχω:

$$\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1\Rightarrow$$
$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x} \qquad (1)$$

οπότε: Αν x>0, τότε με πολλαπλασιασμό της (1) με το x έχω:

$$\begin{aligned} & 1-x < x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le 1 \Rightarrow \\ & -x < x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]-1\le 0 \Rightarrow \\ & -x < x\left[\frac{1}{x}-1\right]\le x \Rightarrow \\ & \left|x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]-1\right|\le |x| \end{aligned} \qquad (2)$$

Αν x<0, τότε με πολλαπλασιασμό της (1) με το x έχω:

$$\begin{aligned} & 1-x > x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\ge 1 \Rightarrow \\ & -x > x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]-1\ge 0 \Rightarrow \\ & -x > x\left[\frac{1}{x}-1\right]\ge x \Rightarrow \\ & \left|x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]-1\right| < |-x| = |x| \end{aligned} \qquad (3)$$

Από (2) και (3) έχω:

$$\left|x\left[\frac{1}{x}\right]-1\right| < x \quad \forall x\in Ñ.$$

Συνεπώς, αρκεί $\forall\varepsilon\in 0$ να επιλέγω δ=ε, οπότε θα εκπληρούται ο ορισμός της σύγκλισης, δηλαδή $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

Να σημειωθεί, ότι υπολογισμός μπορεί να γίνει και με την μέθοδο των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων. Αν πολλαπλασιάσω και τα τρία μέλη της (1) με x>0, θα έχω $1-x\le x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$ και παίρνοντας το όριο έχουμε $1\le \lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

Ομοίως $\lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$, οπότε υπάρχει το όριο στο 0 και είναι 1.

9. Κατασκευή εξίσωσης η οποία περιέχει όριο συνάρτησης σε χ_0 που τείνει στο $+\infty$, με 5 αγνώστους και με μία λύση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την παρακάτω εξίσωση ως προς α, β, γ, δ, ε.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^8+x^4+1}-\left(\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\right)\right]=0 \Leftrightarrow (x\neq 0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^4\sqrt{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}}-x^4\left(\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\delta}{x^3}+\frac{\varepsilon}{x^4}\right)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\cdot x^4\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}}-\alpha-\frac{\beta}{x}-\frac{\gamma}{x^2}-\frac{\delta}{x^3}-\frac{\varepsilon}{x^4}\right]=0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^4\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}}-\alpha-\frac{\beta}{x}-\frac{\gamma}{x^2}-\frac{\delta}{x^3}-\frac{\varepsilon}{x^4}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\infty\cdot(1-\alpha-0-0-0-0)=0\Rightarrow 0$$

$$\infty\cdot(1-\alpha)=0 \qquad (1)$$

Από την (1) έχω ότι αν $1-\alpha\neq 0$, το όριο δεν είναι ποτέ ίσο με 0, άρα πρέπει $\alpha=1$.

Θέτοντας $\alpha=1$, έχω πλέον:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^8+x^4+1}-x^4-\left(\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^8+x^4+1-x^8}{\sqrt{x^8+x^4+1}+x^4}-\left(\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^8}}+1\right)}-\left(\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\right)\right]=0\Rightarrow \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+1}}-\lim_{x\to+\infty}\left(\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\right)=0\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\beta x^3+\lim_{x\to+\infty}\gamma x^2+\lim_{x\to+\infty}\delta x=\frac{1}{2}-\varepsilon$$

Για να ισχύει η (2) πρέπει $\beta=\gamma=\delta=0$, οπότε και $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Άρα, έχω την μοναδική λύση $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)=\left(1{,}0{,}0{,}0,\frac{1}{2}\right)$.

Να σημειωθεί, ότι μπορεί να υπάρξει μία γενίκευση, όπου ο «βαθμός» του ριζικού θα είναι ίσος με το βαθμό του άγνωστου πολυωνύμου για οσουσδήποτε αγνώστους, όμως οι ενδιάμεσες τιμές θα είναι όλες μηδέν.

10. Ισχύει γενικά το θεώρημα του ορίου σύνθεσης συναρτήσεων που έχει την ακόλουθη διατύπωση:

«Αν $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=n$ **και** $\lim\limits_{x\to n} g(x)=\ell$**, τότε:**

ή $\lim\limits_{x\to\infty} g\left(f(x)\right)=l$

ή $\lim\limits_{x\to\xi} g\left(f(x)\right)=g(n)$

ή $\lim\limits_{x\to\xi} g\left(f(x)\right)$ **δεν έχει νόημα».**

Να δοθούν αντιπαραδείγματα για κάθε μία περίπτωση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) $f(x)=x,\quad g(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases},\quad$ και $\xi=0$.

Τότε $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0} g(x)=1\end{matrix}\right\}$ και $\lim\limits_{x\to 0} g\left(f_{(x)}\right)=1\ \ (:=\ell)$.

(ii) $f(x)=[x],\quad g(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases},\quad$ και $\xi=\frac{1}{2}$

Τότε $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0} g(x)=1\end{matrix}\right\}$ και $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g\left(f(x)\right)=0\ \ \left(:\ =g(0)=0\right)$.

(iii) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{αν } x\in \text{Đ}\\ 0, & \text{αν } x\notin \text{Đ}\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases},\quad$ και $\xi=0$

Τότε $\left.\begin{matrix}\exists\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0} g(x)=1\end{matrix}\right\}$ και $\lim\limits_{x\to 0} g\left(f(x)\right)$ δεν υπάρχει, αφού

$g\left(f(x)\right)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{αν } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, η οποία ως γνωστόν δεν έχει πουθενά όριο.

11. Να αποδειχθεί ότι όλες οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς!

(i) **Αν** $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ **τότε** $f(x)=\ell$ **.**

(ii) **Αν η** f **δεν ορίζεται για** $x=x_0$ **, τότε το** $\lim_{x\to x_0} f(x)$ **δεν υπάρχει.**

(iii) **Αν** $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ **και** $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ **, τότε** $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=0$ **.**

(iv) **Αν** $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\ell$ **, τότε και** $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ **.**

(v) **Αν** $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell_1$ **και** $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell_2$ **και** $f(x)<g(x)\ \forall x$ **που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού τους, τότε** $\ell_1<\ell_2$ **.**

(vi) **Αν τα** $\lim_{x\to x_0} f(x)$**,** $\lim_{x\to x_0} g(x)$ **δεν υπάρχουν, τότε δεν υπάρχει ούτε το** $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$**, ούτε και το** $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$**.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (i) Δεν είναι αληθής.

α.χ. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$ δηλαδή $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ και $f(0)=0\neq \lim_{x\to 0} f(x)$.

(ii) Δεν είναι αληθής.

α.χ. : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\,/\,\text{Ñ}-\{0\}$

Στο 0 η f δεν ορίζεται, όμως $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$

(iii) Δεν είναι αληθής.

α.χ. $f(x)=\dfrac{2}{x^2}, g(x)=\dfrac{1}{x^2}, x_0=0$

Τότε: $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\right]=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty\neq 0$.

(iv) Δεν είναι αληθής.

α.χ. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ $|f(x)|=1 \quad \forall x \in \text{Ñ}$.

$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$ $(\forall x_0 \in \text{Ñ})$ ενώ το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει $\forall x_0 \in \text{Ñ}$ (βλέπε και)

(v) $f(x)=x^2,\big|(0,+\infty),\ g(x)=x^2\big|,(0,+\infty)$ $f(x)<g(x)$ $\forall x \in (0,+\infty)$, αλλά

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

(vi) α) $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ -1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

Οι δύο αυτές συναρτήσεις δεν έχουν οριακή τιμή σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Το αποδεικνύω για την f και ομοίως για την g.

Έστω $x_0 \in \text{Ñ}$. Τότε υπάρχει ακολουθία ρητών x_n με $x_n \to x_0$ και $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \text{Í}$.

Επίσης, υπάρχει ακολουθία αρρήτων x'_n, με $x'_n \to x_0$ και $x'_n \neq x_0$ $\forall n \in \text{Í}$.

Τότε, $f(x_n)=1\to 1$ και $f(x'_n)=-1\to -1$.

Επομένως, $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ με $x_0 \in \text{Ñ}$.

Όμως, $f(x)+g(x)=\begin{cases} (-1)+(+1)=0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1+(-1)=0, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}=0 \quad \forall x \in$ �.

Επομένως, $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$ $x_0 \in \text{Ñ}$.

β) Για το γινόμενο, επιλέγω τις ίδιες συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει:

$(fg)(x)=f(x)\cdot g(x)=\begin{cases} (-1)\cdot 1=-1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1\cdot(-1)=-1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}=-1 \ \forall x \in \text{Ñ}$

και επομένως $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=-1$ $x_0 \in \text{Ñ}$.

12. Να δοθούν κατάλληλα αντιπαραδείγματα, από τα οποία να προκύπτει, ότι όταν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων $\lambda\cdot f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $\dfrac{f}{g}$, fg, *και* $f\circ g$ στο $x_0 \in \text{Ñ}$ δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν τα όρια των *f*, *g* στο x_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αν $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$, και $g(x)=\begin{cases} -1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$

τότε:

$(0\cdot f)(x)=0\cdot f(x)=0\to 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, ενώ δεν υπάρχει το όριο της *f(x)* , $\forall x \in$ Ñ

- $\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases} \dfrac{1}{-1}=-1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ \dfrac{-1}{1}=-1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$,
- δηλαδή $\dfrac{f}{g}(x)=-1 \quad \forall x \in$ Ñ και άρα υπάρχει το όριο της $\dfrac{f}{g}(x) \ \forall x \in$ Ñ, ενώ οι
- *f*, *g* δεν έχουν όριο $\forall x \in$ Ñ.
- Για την σύνθεση συναρτήσεων , έχω $(f_0 g)(x)=\begin{cases} f(-1)=1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ f(1)=1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$,

δηλαδή $(f\circ g)(x)=1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ και άρα υπάρχει το όριο της $f\circ g \ \forall x \in$ Ñ, ενώ οι *f*, *g* δεν έχουν όριο πουθενά στο Ñ.

- Για το γινόμενο συναρτήσεων έχω: $fg(x)=f(g(x))=\begin{cases} f(-1)=1, x \ \ ρητος \\ f(1)=1\ ,\ x \ \ αρρητος \end{cases}$

Δηλ. $fg(x)=1 \ \forall \ x\in\mathbb{R}$ και άρα υπάρχει το όριο παντού στο R ενώ οι *f*, *g* δεν έχουν όριο πουθενά στο Ñ.

4.2. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Α. ΟΡΙΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟ $x_0 \in$ Ñ:

α) Μπορεί να ζητηθεί το όριο μιας οποιαδήποτε συνεχούς συνάρτησης, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της, το οποίο ισούται-όχι πάντα- με την τιμή της συνάρτησης στο ίδιο σημείο (βλέπε και Β.4.1.1.γ)

β) Μπορεί να ζητηθεί το όριο και ασυνεχούς συνάρτησης στο x₀, αρκεί να είναι εξουδετερώσιμη(ή άρσιμη ή αιρόμενη) ασυνέχεια.

Β. ΟΡΙΟ ΑΠΕΙΡΟ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$:

α) Αν $f : f(x) = \dfrac{g(x)}{(x - x_0)^{2n} \cdot h(x)}$, $n \in \mathbb{N}$ x_0 σ.σ. του $D(f)$ και $g(x_0) \neq 0$, $h(x_0) \neq 0$

(δηλαδή δεν υπάρχει άλλος παράγοντας ίσος με $x - x_0$).

Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ (ανάλογα με το πρόσημο του $\dfrac{g(x)}{h(x)}$, το οποίο πρέπει να είναι σταθερό σε μια περιοχή του x_0, οσοδήποτε μικρή).

β) Αν $f : f(x) = \dfrac{g(x)}{(x - x_0)^{2n+1} \cdot h(x)}$ με τις ίδιες προηγούμενες προϋποθέσεις, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει, αλλά υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ και είναι +∞ ή -∞, ανάλογα με το πρόσημο του $\dfrac{g(x)}{h(x)}$.

γ) Η περίπτωση (α) μόνο που στη θέση του $(x - x_0)^{2n}$ θέτουμε $|x - x_0|^n$.

δ) Όρια ειδικών συναρτήσεων:

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n x = -\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \text{εφ}x = -\infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \text{εφ}x = +\infty$

Γ. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ +∞ Ή -∞:

α) Αν $f(x) = \dfrac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \beta_0}$, τότε

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$, όταν $n=m$.

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, όταν $n<m$.

Τα ίδια όρια έχω και όταν $x \to -\infty$.

β) $\lim\limits_{+\infty} \left(\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + \gamma} - \sqrt{\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'} \right) = 0 \quad (\alpha = \alpha')$.

γ) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_0} = 0$, όπου ένα τουλάχιστον από τα $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n$ είναι μη μηδενικό και *f(x)* φραγμένη συνάρτηση.

Αντί του πολυωνύμου του παρανομαστή μπορεί να τεθεί οποιαδήποτε συνάρτηση $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$

δ) Όρια ειδικών συναρτήσεων:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha .$$

Δ. ΑΠΕΙΡΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ ±∞:

α) Αν $f(x) = \dfrac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_0}{\beta_n x^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + ... + \beta_0}$, $\alpha_n \cdot \beta_n \neq 0$,

τότε $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \text{sign}\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \cdot \infty$, αν *n>m*.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \text{sign}\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \cdot (-1)^{n-m} \cdot \infty$, αν *n>m*.

β) Αν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... \alpha_0$,

τότε $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = sign(\alpha_n) \infty$,

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \text{sign } \alpha_\text{n} (-1)^n \cdot \infty$.

γ) Όρια ειδικών συναρτήσεων:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \ell n x = +\infty$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\ell n x} = +\infty$

(iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

(v) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \alpha > 0$.

Ε. ΜΗ ΥΠΑΡΞΗ ΟΡΙΟΥ:

α) Αν f / Ñ περιοδική και όχι σταθερή, τότε τα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ δεν υπάρχουν.

β) Αν $f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ h(x), & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$, και $g(x_0)\neq h(x_0)$,

τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

γ) Αν μία συνάρτηση *f(x)* δεν έχει όριο όταν $x\to+\infty$, τότε και η $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ δεν έχει όριο όταν $x\to 0$ και η $f\left(\dfrac{1}{x-\alpha}\right)$ δεν έχει όριο όταν $x\to a^{+}$ $(\alpha>0)$.

δ) Αν $f(x)=\begin{cases} g(x), & \text{αν } x\leq\alpha \\ h(x), & \text{αν } x>\alpha \end{cases}$, $g(\alpha)\neq h(\alpha)$ και οι *g*, *h*, συνεχείς στον αντίστοιχο περιορισμό τους, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

ΣΤ. ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΟΡΙΩΝ , ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ως ειδικές περιπτώσεις των παρακάτω παραδειγμάτων, μπορούν να κατασκευασθούν άπειρα ειδικότερα παραδείγματα.

α) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \dfrac{x}{\alpha}\cdot\left[\dfrac{\beta}{x}\right]=\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\lim\limits_{0^{+}} \dfrac{\alpha}{x}\cdot\left[\dfrac{x}{\beta}\right]=0$ $\qquad (\alpha,\beta>0)$.

β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}=\dfrac{1}{n}$, $\quad n\in \text{Í}^{*}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\dfrac{\alpha_1}{m}$, όπου $.\, m\in \text{Í}^{*}$ και $P(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n+1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x$.

δ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\alpha x^n+\beta x^m+\gamma}{x-1}=\alpha n+\beta m$, όταν *α+β+γ=0*, $.\, m,n\in \text{Í}$.

ε) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)}-1}{x}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

στ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}=\dfrac{n}{m}$ $\quad (n,m\in \text{Í}^{*})$.

ζ) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}{x^2-\alpha^2}=\dfrac{1}{4\alpha\sqrt{\alpha-\beta}}$ $\quad (\alpha>\beta)$.

η) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}=\dfrac{m}{n}$ $\quad (n,m\in \text{Í}^{*})$.

θ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\alpha}-\sqrt{x}=0$.

ι) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left\lfloor\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right\rfloor=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left\lfloor\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right\rfloor=+\infty$.

ια) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{εφ}\kappa x}{\lambda\cdot x}=\dfrac{\kappa}{\lambda}$.

ιβ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}\alpha x}{\text{ημ}\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

ιγ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}\left(x^{n}\right)}{(\text{ημ}x)^{m}}=\left\{\begin{matrix}0, & \text{αν} & n>m\\ 1, & \text{αν} & n=m\\ \infty, & \text{αν} & n<m\end{matrix}\right\}$.

ιδ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)-\sigma\upsilon\nu(\alpha-x)}{x}=-2\text{ημ}\alpha$.

ιε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha x-\sigma\upsilon\nu\beta x}{x^{2}}=\dfrac{\beta^{2}-\alpha^{2}}{2}$.

ιστ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}(\alpha+x)-\text{ημ}(\alpha-x)}{\text{εφ}(\alpha+x)-\text{εφ}(\alpha-x)}=\text{συν}^{3}\alpha$.

ιζ) $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\text{ημ}^{2}x-\text{ημ}^{2}\alpha}{x^{2}-\alpha^{2}}=\dfrac{\text{συν}2\alpha}{2a}$.

ιη) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{ημ}(\alpha+2x)-2\text{ημ}(\alpha+x)+\text{ημ}\alpha}{x^{2}}=\text{ημ}\alpha$.

ιθ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{εφ}(\alpha+2x)-\text{εφ}(\alpha+x)+\text{εφ}\alpha}{x^{2}}=\dfrac{2\text{ημ}\alpha}{\text{συν}^{3}\alpha}$.

κ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$.

κα) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^{n}}\right)=\left\{\begin{matrix}\infty, & \text{αν} & n<1\\ e, & \text{αν} & n=1\\ 1, & \text{αν} & n>1\end{matrix}\right\}$.

κβ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}=\alpha-\beta$.

κγ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{(\alpha x+1)^{n}}{x^{n}+\beta}\right)=\left\{\begin{matrix}\alpha^{n}, & \text{αν} & n\in\mathbb{Z}_{+}^{*} & \\ 0, & \text{αν} & n\in\mathbb{Z}_{-}^{*} & \text{και}\ \beta\neq 0\\ \alpha^{n}, & \text{αν} & n\in\mathbb{Z}_{-}^{*} & \text{και}\ \beta=0\ \text{και}\ \alpha\neq 0\\ \infty, & \text{αν} & n\in\mathbb{Z}_{-}^{*} & \text{και}\ \beta=\alpha=0\\ \dfrac{1}{1+\beta}, & \text{αν} & n=0 & \end{matrix}\right\}$.

5. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

5.1. ΣΥΝΕΧΕΙΑ , ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ , ΣΥΝΕΧΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗ

1. Να εξεταστεί η αλήθεια ή όχι του παρακάτω ορισμού:
«Μία συνάρτηση $f \mid A$ θα λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$, εάν και μόνο εάν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$».

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ο ανωτέρω ορισμός είναι ορθός μόνον όταν το x_0 είναι σ.σ. του *A*. Όταν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της *f*, τότε η *f* θεωρείται συνεχής σε αυτό. Σε μεμονωμένο σημείο x_0 δεν έχει νόημα το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Ο σωστός ορισμός είναι ο εξής:
(Η *f* συνεχής στο $x_0 \in A$)
$\Leftrightarrow (\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 : x \in A \, \kappa\alpha\iota \, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

<u>*Ο ορισμός που ετέθη στην εκφώνηση έχει μια επιπλέον προϋπόθεση, δηλαδή*</u>

(f συνεχής στο $x_0 \in A$) $\Leftrightarrow (\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Δηλαδή η διαφορά είναι η επιπλέον απαίτηση $0 < |x - x_0|$ που δεν καλύπτει το τυχόν μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού. α.χ. η

$$f : f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} \text{ έχει } \mathrm{D}(f) = \{3\}.$$

Ο ορισμός της συνέχειας στο $x_0 = 3$ εκπληρούται, αφού $\forall \ \varepsilon > 0$, εκλέγω $\delta = \varepsilon > 0$ και για το μοναδικό στοιχείο του $\mathrm{D}(f)$ ισχύει

$$|x_0 - x_0| = 0 < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon .$$

Σε περίπτωση που το πεδίο ορισμού περιέχει και άλλα στοιχεία (μεμονωμένα ή μη) εφόσον το x_0 είναι μεμονωμένο, υπάρχει

$$S'(x_0, p) : S'(x_0, p) \cap \mathrm{D}(f) = \{x_0\}.$$

Εκεί $\forall \ \varepsilon > 0$, θα εκλέγουμε $\delta = p > 0$ και θα εκπληρούται ο ορισμός της συνέχειας.

Να σημειωθεί ακόμη, ότι η γνωστότερη κλάση συναρτήσεων με μεμονωμένα σημεία είναι οι ακολουθίες, οι οποίες ως γνωστόν είναι συναρτήσεις $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $\mathbb{N} \ni \nu \xrightarrow{\alpha} \alpha(\nu) = \alpha_\nu$. Όλες είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους

(: σε κάθε φυσικό) αλλά το όριο σε ένα τέτοιο σημείο (π.χ. $\lim\limits_{\nu \to 3} \alpha_\nu$) δεν έχει νόημα διότι το 3 ή οποιοσδήποτε άλλος φυσικός δεν είναι σ.σ. του $\mathbb{N}$, γι' αυτό και υπάρχουν όρια ακολουθιών μόνο στο $+\infty$ που είναι και το μοναδικό σ.σ. του $\mathbb{N}$

2. Να αποδειχθεί ότι ο περιορισμός ασυνεχούς συνάρτησης *f* σε σημείο x_0 σε ένα διάστημα διάστημα που περιέχει το x_0 , είναι δυνατόν να είναι συνεχής στο x_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Για τη συνάρτηση *f*:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad x < 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases} \text{ έχω } \lim_{x \to 0} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0).$$

Δηλαδή η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά αν θεωρήσω τον περιορισμό $g = f\,/[0,+\infty)$ έχω ότι

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 = g(0).$$

3. «Αν μια συνάρτηση έχει ως γραφική παράσταση μόνο "μεμονωμένα σημεία" (δηλαδή δεν υπάρχει ούτε ένα τμήμα της από "συνεχή" γραμμή, τότε η συνάρτηση είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της».
Είναι αληθής η ανωτέρω πρόταση;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι ψευδής. Ως αντιπαράδειγμα θα βρούμε συνάρτηση, η οποία έχει ως γραφική παράσταση μεμονωμένα σημεία, δεν έχει ούτε ένα τμήμα της γραμμή και είναι συνεχής παντού.

Τέτοιο αντιπαράδειγμα είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία. Εδώ επιλέγουμε την $f : f(x) = \frac{1}{x} / Í^*$ η οποία όπως γνωρίζουμε συμβολίζεται συνήθως ως $\alpha_n = \frac{1}{n}$ και η οποία είναι συνεχής παντού. (Βλέπε και Β5.5.1)

4. «Μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σύνολο *A*, όταν το γράφημά της μπορεί να σχεδιαστεί με μονοκονδυλιά, δηλαδή χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί».

Εξετάστε την αλήθεια του προηγούμενου ισχυρισμού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι ψευδής. α.χ. η

$$f : f(x) = \frac{1}{x} / (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, αλλά στο 0, παρουσιάζει «άπειρο πήδημα» και άρα σχεδιάζουμε δύο ξέχωρους κλάδους , σηκώνοντας την γραφίδα σχεδίασης!

Για να είναι αληθής ο ισχυρισμός σε ότι αφορά το συμπέρασμα, θα πρέπει να τεθεί ο εξής πρόσθετος περιορισμός:

Η *f* να έχει πεδίο ορισμού διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta)$ ή $(\alpha, \beta]$ ή (α, β) ή $(-\infty, \alpha)$ ή $(\alpha, +\infty)$.

Πρέπει όμως να λάβουμε υπόψη μας και το εξής

- Αν η f ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ (και δεν έχει άπειρη κύμανση ή άπειρο μήκος η καμπύλη ή έχει πεπερασμένο μήκος , αλλά κάνει άπειρο πλήθος ταλαντώσεων) τότε μπορεί να σχεδιαστεί ***εξ' ολοκλήρου***.
- Αν η f έχει άπειρο μήκος δεν σχεδιάζεται ποτέ με μονοκονδυλιά, διότι θα χρειαζόμαστε άπειρο χρόνο!
- Αν η f σε ανοικτά πεπερασμένα άκρα του πεδίου ορισμού της έχει μη πεπερασμένο όριο τότε έχει άπειρο μήκος και δεν σχεδιάζεται ποτέ.
- Ομοίως η *f* σε (ανοικτά) άπειρα άκρα του πεδίου ορισμού της έχει οποιοδήποτε όριο, ομοίως δεν μπορεί να σχεδιαστεί εξ' ολοκλήρου.
- Αν η f έχει μεν πεπερασμένο μήκος, αλλά ταλαντώνεται άπειρες φορές, ομοίως δεν είναι δυνατόν να σχεδιασθεί εξ ολοκλήρου.

Επομένως από όλα τα παραπάνω καθίσταται σαφές το εξής:
«Το γράφημα μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ , είναι δυνατόν να σχεδιασθεί ***εξ ολοκλήρου*** *με μονοκονδυλιά αν η f είναι συνεχής σε αυτό , και αν η f έχει πεπερασμένο μήκος στο διάστημα και αν η f δεν ταλαντώνεται άπειρες φορές. ».*

5. Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι ανεκάλυψε ένα κριτήριο συνέχειας μιας συνάρτησης *f* σε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Σύμφωνα με αυτό, «Μια συνάρτηση *f* είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathrm{D}(f)$ και x_0 σ.σ. του $\mathrm{D}(f)$, εάν και μόνο εάν $\lim_{\varepsilon \to 0}[f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0 - \varepsilon)] = 0$».

Μπορείτε να τον διαψεύσετε;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ τη συνάρτηση $f : Ñ \to Ñ$ για την οποία $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$ η οποία δεν είναι συνεχής στο 0, αφού $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$.

Σύμφωνα όμως με το «κριτήριο» του φοιτητή, ισχύει

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} [f(0+\varepsilon) - f(0-\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} [f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(-\varepsilon) = 0 - 0 = 0 .$$

Δηλαδή θα πρέπει η f να είναι συνεχής στο 0, πράγμα άτοπο.

Συνεπώς το κριτήριο είναι αναληθές.

6. Είναι γνωστό ότι «Αν η μία συνάρτηση είναι συνεχής σε σημείο x_0 και $f(x_0) \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0, στην οποία η f διατηρεί το πρόσημο της τιμής $f(x_0)$».

1) **Να αποδειχθεί ότι η υπόθεση της συνέχειας στο x_0 είναι αναγκαία για την ισχύ του συμπεράσματος**

2) **Να βρεθεί συνάρτηση που να μην είναι συνεχής στο x_0 αλλά να ικανοποιεί το συμπέρασμα της προτάσεως.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1) Για την συνάρτηση $f : [0,1] \to Ñ$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \in [0,2] \setminus \{1\} \\ -1 & \text{αν} \quad x = 1 \end{cases}$ ισχύει:

- Η f δεν είναι συνεχής στο 1.
- $f(1) = -1 < 0$.
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$. Άρα αν δεχθούμε ότι υπάρχει μια περιοχή του 1 στην οποία η f να είναι αρνητική τότε

  $$\exists\, \delta > 0 : x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow f(x) < 0 \qquad (1)$$

  Όμως η (1) είναι αληθής μόνο για $x_0 = 1$, ενώ το διάστημα $(1-\delta, 1+\delta)$ έχει και άπειρους άλλους πραγματικούς, για τους οποίους ισχύει $f(x) = 1 > 0$. Άρα η (1) είναι άτοπη σχέση.

Δηλαδή βρήκαμε παράδειγμα συναρτήσεως ασυνεχούς σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της, που δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος γι' αυτό το σημείο. Έτσι η υπόθεση της συνέχειας είναι αναγκαία.

Όμως , αν μια συνάρτηση είναι ασυνεχής σε σημείο x_0, είναι δυνατόν να διατηρεί το πρόσημό της σε περιοχή του x_0.

Αυτό συμβαίνει στο παρακάτω:

2) $f : f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,2] \setminus \{1\} \\ 2 & x = 1 \end{cases}$.

Η f είναι ασυνεχής στο 1, αφού $f(1) = 2 \neq 1 = \lim_{x \to 1} f(x)$. Επίσης $f(1) = 2 > 0$. Όμως $f(x) > 0 \ \ \forall \ x \in [0,2]$ άρα και σε οποιαδήποτε περιοχή του 1.

7. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα και το γινόμενο συνεχών συναρτήσεων σε σημείο x_0 , είναι συνάρτηση συνεχής στο x_0.

Να αποδειχθεί ότι το αντίστροφο δεν ισχύει .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα δείξω ότι υπάρχουν f, g και x_0 του πεδίου ορισμού τους για τις οποίες να ισχύει $f \cdot g$ και $f + g$ συνεχείς στο x_0, αλλά οι f και g να είναι ασυνεχείς στο x_0.

Θεωρώ $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ +1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} +1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ οι οποίες είναι ασυνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Όμως $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} -1+1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ +1-1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$.

Δηλαδή $(f+g)(x) = 0, \ \ \forall \ x \in$ Ñ, συνεχής παντού.

Επίσης $(f \cdot g)(\mathrm{x}) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases} = -1 \ \ \forall \ x \in$ Ñ.

Δηλαδή $(f \cdot g)(x) = -1 \ \ \forall \ x \in$ Ñ, συνεχής παντού.

8. Να δοθούν παραδείγματα συναρτήσεων ορισμένων στο Ñ έτσι ώστε:

(i) Η f_1 να είναι συνεχής παντού

(ii) Η f_2 να είναι συνεχής παντού, πλην πεπερασμένου πλήθους σημείων

ασυνέχειας

(iii) Η f_3 να είναι συνεχής παντού, πλην αριθμησίμου πλήθους σημείων ασυνέχειας

(iv) **Η f_4 να είναι συνεχής παντού, πλην υπεραριθμησίμου πλήθους σημείων ασυνέχειας.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) $f_1 : f_1(x) = 1,\ \forall\ x \in$ Ñ

(ii) $f_2 : f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \in \text{Ñ} \setminus A \\ 0, & \text{αν} \quad x \in A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \subseteq \text{Ñ} \end{cases}$

(iii) $f_3 : f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \in \text{Ñ} \setminus \text{Í} \\ 0, & \text{αν} \quad x \in \text{Í} \end{cases}$

(iv) $f_4 : f_4(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \in \text{Ñ} \setminus [0,1] \\ 0, & \text{αν} \quad x \in [0,1] \end{cases}.$

Οι αποδείξεις είναι στοιχειώδεις, λαμβάνοντας υπόψη ότι το Í (εξ' ορισμού) είναι αριθμήσιμο σύνολο και το [0,1] υπεραριθμήσιμο (διαγώνιο επιχείρημα του Cantor).

9. Να εξετασθεί αν υπάρχει συνάρτηση f, η οποία

- **είναι ορισμένη στο** Ñ
- **Είναι ασυνεχής** $\forall\ x_0 \in$ Ñ

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η συνάρτηση του Dirichlet εκπληροί τις τεθείσες συνθήκες

$$f : f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \\ 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \end{cases}.$$

Έστω x_0 ρητός. Τότε $f(x_0) = 1$. Επίσης, υπάρχει ακολουθία αρρήτων $x_n : x_n \to x_0$ και $x_n \neq x_0 \quad \forall\ n \in$ Í. $f(x_n) = 0 \to 0 \neq f(x_0) = 1$. Δηλαδή η f δεν είναι συνεχής σε κανένα ρητό.

Έστω x_0 άρρητος. Τότε $f(x_0) = 0$. Επίσης, υπάρχει ακολουθία ρητών $x'_n : x'_n \to x_0$ και $x'_n \neq x_0 \quad \forall\ n' \in$ Í. $f(x_n) = 1 \to 1 \neq f(x_0) = 0$. Δηλαδή η f είναι ασυνεχής και σε κάθε άρρητο.

Τελικά f ασυνεχής $\forall\ x_0 \in$ Ñ.

10. Να εξετασθεί, αν υπάρχει συνάρτηση η οποία:

- **Είναι ορισμένη στο Ñ**
- **Είναι συνεχής σε ένα σημείο $\alpha \in$ Ñ**
- **Είναι ασυνεχής σε κάθε άλλο σημείο διάφορο του α.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Συνάρτηση που εκπληροί τις ανωτέρω προϋποθέσεις είναι η:

$$f : f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2\alpha - x, & \text{αν} & x \text{ ρητός} \\ x, & \text{αν} & x \text{ άρρητος} \end{array} \right\}.$$

- Είναι ορισμένη σε όλο το Ñ
- Θα δείξω την συνέχειά της στο $x_0 = \alpha$, με χρήση του ακολουθιακού ορισμού:

  Έστω $x_n \to \alpha$, με $x_n \neq \alpha\ \ \forall\ n \in$ Í. Τότε

$$f(\alpha) = \left\{ \begin{array}{lll} 2\alpha - \alpha = \alpha, & \text{αν} & \alpha \text{ ρητός} \\ \alpha, & \text{αν} & \alpha \text{ άρρητος} \end{array} \right\}$$

  δηλαδή $f(\alpha) = \alpha$ και

$$| f(x_n) - f(\alpha) | = \left\{ \begin{array}{lll} | 2\alpha - x_n - \alpha | = | \alpha - x_n | = | x_n - \alpha |, & \text{αν} & x \text{ ρητός} \\ | x_n - \alpha |, & \text{αν} & x \text{ άρρητος} \end{array} \right\}.$$

  Δηλαδή

$$| f(x_n) - f(\alpha) | = | x_n - \alpha |,\ \forall\ x_n \in \text{Ñ}. \quad (1)$$

  Επομένως $\forall\ \varepsilon > 0$, επιλέγοντας $\delta = \varepsilon$, και λόγω της (1) ισχύει

$$| x_n - \alpha | < \delta \Rightarrow | f(x_n) - f(\alpha) | < \varepsilon .$$

- Θα δείξω την ασυνέχεια της f σε κάθε

$$x_0 \neq \alpha . \quad (2)$$

  Έστω ακολουθία αρρήτων $x_n : x_n \to x_0$ και $x_n \neq x_0\ \ \forall\ n \in$ Í.

  Τότε $f(x_n) = x_n \to x_0$.

  Έστω ακολουθία ρητών $x'_n : x_n \to \alpha$ και $x'_n \neq \alpha\ \ \forall\ n \in$ Í.

  Τότε $f(x'_n) = 2\alpha - x'_n \to 2\alpha - x_0$. Όμως $x_0 \neq 2\alpha - x_0$ (λόγω της (2)).

  Έτσι η f δεν έχει όριο σε κανένα άλλο σημείο $x_0 \in$ Ñ με $x_0 \neq \alpha$.

  Επομένως είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \neq \alpha$.

11. Να εξετασθεί αν υπάρχει συνάρτηση f, η οποία

- **Να είναι ορισμένη στο Ñ**
- **Να είναι συνεχής** $\forall\ x_0 \in \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\} \subseteq$ Ñ
- **Να είναι ασυνεχής** $\forall\ x_0 \notin \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θέτουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\kappa) & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \\ 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \end{cases}.$$

1. Έστω $x_0 \in \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ τότε $f(x_0) = 0$. Έστω $x_n \to x_0$ και $x_n \neq x_0$ $\forall\ n \in$ Í.

Τότε:

(i) Αν η x_n έχει τελικά άρρητους όρους, τότε η $f(x_n) = 0$ τελικά, δηλαδή $f(x_n) \to 0 = f(x_0)$.

(ii) Αν η x_n έχει τελικά ρητούς όρους, τότε η

$$f(x_n) = (x_n - \alpha_1)(x_n - \alpha_2)...(x_n - \alpha_\kappa) \to 0 = f(x_0).$$

(iii) Αν δεν συμβαίνει ένα από τα δύο προηγούμενα, τότε η x_n διαχωρίζεται σε δύο υπακολουθίες, η μία ρητών α_n που συγκλίνει στον α_i $(1 \le i \le \kappa)$και η άλλη αρρήτων α'_n που συγκλίνει επίσης στον α_i. Τότε

$f(\alpha_n) = (\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)...(\alpha_n - \alpha_\kappa) \to 0$.

$f(\alpha'_n) = 0 \to 0$.

Άρα $f(x_n) \to 0 = f(x_0)$. Δηλαδή η f συνεχής στο x_0, $x_0 \in \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$.

2. Έστω $x_0 \notin \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ τότε ο x_0 μπορεί να είναι ρητός ή άρρητος.

(α) Αν x_0 άρρητος, τότε $f(x_0) = 0$ και υπάρχει ακολουθία ρητών: $y_n : y_n \to x_0$ και $y_n \neq x_0$ $\forall\ n \in$ Í. Όμως

$f(y_n) = (y_n - \alpha_1)(y_n - \alpha_2)...(y_n - \alpha_\kappa) \to (x_0 - \alpha_1)(x_0 - \alpha_2)...(x_0 - \alpha_\kappa) \neq 0 = f(x_0)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Αν x_0 ρητός, τότε $f(x_0) = (x_0 - \alpha_1)(x_0 - \alpha_2)...(x_0 - \alpha_\kappa) \neq 0$. Υπάρχει ακολουθία αρρήτων $y'_n : y'_n \to x_0$ και $y'_n \neq x_0$ $\forall\ n \in$ Í.

Τότε $f(y'_n) = 0 \to 0 \neq f(x_0)$. Άρα η f είναι ασυνεχής στο x_0.

12. Να βρεθεί, αν υπάρχει συνάρτηση f, η οποία

- **Να είναι ορισμένη στο Ñ**
- **Να είναι συνεχής σε άπειρο αριθμήσιμο σύνολο A**
- **Να είναι ασυνεχής $\forall\ x_0 \notin A$.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η συνάρτηση *f*:

$$f(x) = \begin{cases} \text{ημ}x, & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \\ 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \end{cases}$$

- Είναι ορισμένη στο Ñ (προφανώς)
- Είναι συνεχής στο $A = \{\kappa\pi : \kappa \in$ Ù$\}$ που είναι αριθμήσιμο αφού τίθεται σε "$1-1$" και "επί" αντιστοίχιση με το Í μέσω της $\phi : \phi(\kappa\pi) = \begin{cases} 2\kappa, & \text{αν} \quad \kappa \geq 0 \\ -(2\kappa+1), & \text{αν} \quad \kappa < 0 \end{cases}$ $\kappa \in$ Í*.

Έστω $x_0 \in A$. Τότε $\exists\ \lambda \in$ Ù$: x_0 = \lambda\pi$ και

$$f(x_0) = f(\lambda\pi) = \begin{cases} \text{ημ}0, & \text{αν} \quad \lambda = 0 \\ 0, & \text{αν} \quad (\lambda \neq 0 \ \text{άρρητος} \end{cases}$$. Δηλαδή $f(\lambda\pi) = 0 \ \ \forall\ \lambda \in$ Ù.

Έστω ακολουθία ρητών τελικά $x_n : x_n \to \lambda\pi$ και $x_n \neq \lambda\pi \ \ \forall\ n \in$ Í. Τότε $f(x_n) = \text{ημ}x_n \to \text{ημ}\lambda\pi = 0 = f(\lambda\pi)$.

Έστω ακολουθία τελικά αρρήτων $x'_n : x'_n \to \lambda\pi$ και $x'_n \neq \lambda\pi \ \ \forall\ n \in$ Í. Τότε $f(x'_n) = 0 \to 0 = f(\lambda\pi)$.

Αν έχω μια οποιαδήποτε ακολουθία y_n διάφορη των δύο προηγούμενων, τότε, οσοδήποτε κοντά στο $\lambda\pi$ υπάρχει και ρητός και άρρητος όρος. Δηλαδή η y_n μπορεί να χωριστεί σε δύο υπακολουθίες, που η μία να έχει μόνο ρητούς όρους η α_n και η άλλη μόνο αρρήτους η α'_n και οι οποίες (σύμφωνα με τα προηγούμενα) θα τείνουν στο $\lambda\pi$, ενώ

$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha_n) = \text{ημ}\alpha_n \to \text{ημ}\lambda\pi = 0 = f(\lambda\pi) \\ f(\alpha'_n) = 0 \to 0 = f(\lambda\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow f(y_n) \to 0 = f(\lambda\pi).$$

Δηλαδή $\forall$ ακολουθία y_n με $y_n \to \lambda\pi$ και $y_n \neq \lambda\pi \ \ \forall\ n \in$ Í, έχω $f(y_n) \to 0 = f(\lambda\pi)$, άρα η *f* είναι συνεχής $\forall\ x_0 \in A$.

- Έστω $x_0 \notin A$, τότε

$$x_0 \neq \lambda\pi \qquad \forall\ \lambda \in \text{Ù} \text{ και } x_0 \text{ ρητός} \tag{1}$$

. Τότε $f(x_0) = \text{ημ}x_0 \neq 0$ (λόγω της (1))

Έστω x_n ακολουθία αρρήτων με $x_n \to x_0$ ($x_n \neq x_0\ \ \forall\ n \in \text{Í}$).

Τότε $f(x_n) = 0 \to 0 \neq f(x_0)$, άρα η f συνεχής και για κάθε ρητό.

Έστω $x_0 \notin A$, τότε $x_0 \neq \lambda\pi\ \ \forall\ \lambda \in \text{Ù}$ και x_0 άρρητος.

Τότε $f(x_0) = 0$. Υπάρχει ακολουθία ρητών $x'_n ; x'_n \to x_0$ και $x'_n \neq x_0\ \ \forall\ n \in \text{Í}$.

Τότε $f(x'_n) = \text{ημ}x'_n \to \text{ημ}x_0 \underset{(1)}{\neq} 0 = f(x_0)$. Άρα η f συνεχής $\forall\ x_0 \notin A$.

13. Να βρεθεί παράδειγμα συνάρτησης *f*:

- **Να είναι ορισμένη στο διάστημα** $[0,1]$
- **Να έχει άπειρα αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας στο** $[0,1]$
- **Να είναι συνεχής σε κάθε άλλο σημείο.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f:[0,1] \to \text{Ñ}$ με $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{αν } x = \dfrac{1}{n} \end{cases}\ \ n \in \text{Í}^*$.

Πράγματι, οι όροι της ακολουθίας $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ είναι άπειροι, αριθμήσιμοι και $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \neq 0 = \lim\limits_{x \to \frac{1}{n}} f(x)$. Αν $x_n \to \dfrac{1}{n_0}$ και $x_n \neq \dfrac{1}{n_0}\ \ \forall\ n \in \text{Í}$, τότε **τελικά,** $f(x_n) = 0 \to 0 \neq \dfrac{1}{n_0} = f\left(\dfrac{1}{n_0}\right)$.

Μια εξήγηση για το "τελικά":

$\forall\ n_0$, υπάρχει περιοχή του $\dfrac{1}{n_0}$ και συγκεκριμένα η $A = \left(\dfrac{1}{n_0} - \dfrac{2}{n_0+1}, \dfrac{1}{n_0} + \dfrac{2}{n_0+1}\right)$ που δεν περιέχει κανέναν ρητό της μορφής $\dfrac{1}{\lambda}$. Συνεπώς $\forall\ x \in A\ \ f(x) = 0$ και άρα και $f(x_n) = 0$ ***τελικά***.

14. Να βρεθούν δύο συναρτήσεις f, g:

α) Η f να μη είναι συνεχής στα σημεία 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,… και συνεχής παντού αλλού.

β) Η g να μη είναι συνεχής στα σημεία 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,… και 0, και συνεχής παντού αλλού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \frac{1}{n},\ n = 1,2,3,... \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n},\ n = 1,2,3,... \end{cases}$. Η απόδειξη στο προηγούμενο.

β) $g(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \frac{1}{n},\ n = 1,2,3,... \\ 1, & x = \frac{1}{n},\ n = 1,2,3,... \end{cases}$

15. Να αποδείξετε, ότι αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε κατασκευάζεται μία συνάρτηση g η οποία να είναι συνεχής στο Ñ και για την οποία να ισχύει $f(x) = g(x),\ \forall\ x \in [\alpha,\beta]$.
Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα να αποδείξετε ότι για διάστημα (α,β) γενικά τούτο δεν είναι δυνατό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ορίζω g : Ñ → Ñ με $g(x) = \begin{cases} f(\alpha), & x < \alpha \\ f(x), & \alpha \leq x \leq \beta \\ f(\beta), & x > \beta \end{cases}$.

Η g προφανώς είναι συνεχής στο Ñ, εκτός ίσως από τα σημεία α και β όπου πρέπει να εξετασθεί η συνέχεια λεπτομερώς

$$\lim_{x\to\alpha^-} g(x) = g(\alpha) = \lim_{x\to\alpha^+} g(x).$$

Ομοίως και το β.

Όταν όμως έχω **ανοικτό διάστημα** τούτο δεν είναι δυνατό πάντα, όπως φαίνεται και από το παρακάτω παράδειγμα:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\Big/(0,1).$$

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$. Αν όμως υπήρχε $g: g(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ τότε $g(1)=+\infty$ άτοπο.

16. Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων, ορισμένων στο x_0 έτσι ώστε:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, **είναι πεπερασμένα και διάφορα του** $f(x_0)$ **(δηλαδή αιρόμενη ασυνέχεια με επανορισμό της τιμής στο** x_0**-πρώτου είδους)**

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, **είναι πεπερασμένα και διαφορετικά και τα δύο με το** $f(x_0)$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, **είναι πεπερασμένα και** $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ **(δηλαδή συνεχής αριστερά-πρώτου είδους ασυνέχεια)**

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0^+} \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, **είναι πεπερασμένα και** $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ **(δηλαδή συνεχής δεξιά-πρώτου είδους ασυνέχεια)**

(v) $\lim\limits_{x\to x_0^+} = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, **είναι πεπερασμένα και δεν ορίζεται η** $f(x_0)$ **(αιρόμενη ασυνέχεια με κατάλληλη επέκταση του πεδίου ορισμού)**

(vi) Το x_0 **είναι σ.σ. του πεδίου ορισμού της συνάρτησης, υπάρχει το** $f(x_0)$**, αλλά δεν υπάρχει στο όριο στο** x_0**, είτε από δεξιά, είτε από αριστερά, είτε είναι πεπερασμένο είτε άπειρο.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) $f_1 : f_1(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_1(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ και $f(0)=0$.

Αν ορίσουμε νέα συνάρτηση $\hat{f}_1 : \hat{f}_1(x)=f_1(x) \quad \forall \quad x\neq 0$ και $\hat{f}_1(0)=1$ η ασυνέχεια αίρεται.

(ii) $f_2 : f_2(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 2 & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)=1\neq -1 \lim\limits_{x\to 0^-} f_2(x)$ και $f(0)=2$. Έχω ασυνέχεια πρώτου είδους που δεν αίρεται.

(iii) $f_3 : f_3(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x > 0 \\ -1, & x \le 0 \end{Bmatrix}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0) \ne 1 = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Εδώ έχω πλευρική εξ αριστερών μόνο συνέχεια στο 0.

(iv) $f_4 : f_4(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{Bmatrix}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0) \ne -1 = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Εδώ έχω πλευρική εκ δεξιών μόνο συνέχεια στο 0.

(v) $f_5 : f_5(x) = \frac{\text{ημ}x}{x} \Big/ (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Όμως ως γνωστόν $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{ημ}x}{x} = 1$. Επομένως η ασυνέχεια αίρεται με κατάλληλη επέκταση σε όλο το Ñ όπου

$$\widehat{f}_5 : \widehat{f}_5(x) = \begin{Bmatrix} \frac{\text{ημ}x}{x}, & \text{αν} \quad x \ne 0 \\ 1, & \text{αν} \quad x = 0 \end{Bmatrix}.$$

(vi) $f_6 : f_6(x) = \begin{Bmatrix} \text{ημ}\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{Bmatrix}$. Η f_6 είναι φραγμένη κι άρα δεν έχει άπειρο όριο σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Θεωρώ την ακολουθία $x_n : x_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ και $x_n \ne 0 \ \forall \ n \in$ Í.

Επίσης την $x'_n : x'_n = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$ και $x'_n \ne 0 \ \forall \ n \in$ Í.

Τότε $\qquad f_6(x_n) = \text{ημ}\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$

Και $\qquad f_6(x'_n) = \text{ημ}(2\pi n) = 0 \to 0$.

Δηλαδή βρήκαμε δύο μηδενικές ακολουθίες, για τις οποίες $\lim\limits_{n \to +\infty} f_6(x_n) \ne \lim\limits_{n \to +\infty} f_6(x'_n)$. Άρα δεν υπάρχει όριο της f_6 στο 0. Εκεί λοιπόν έχω ασυνέχεια η οποία δεν μπορεί φυσικά να αρθεί.

17. Να κατασκευάσετε παραδείγματα με όλες τις δυνατές περιπτώσεις ασυνέχειας 2ης κατηγορίας σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού συνάρτησης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) η $f_1 : f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (-1,0) \\ x, & x \in [0,1) \end{cases}$ έχει:

- $\lim_{x \to 0^-} f_1(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = 0$
- $f(0) = 0$.

Δηλαδή είναι εκ δεξιών συνεχής στο 0, ασυνεχής στο 0.

(ii) η $f_2 : f_2(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1,0] \\ \frac{1}{x}, & x \in (0,1) \end{cases}$ έχει:

- $\lim_{x \to 0^-} f_2(x) = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = +\infty$
- $f(0) = 0$.

Δηλαδή είναι εξ αριστερών συνεχής στο 0, ασυνεχής στο 0.

(iii) η $f_3 : f_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (-1,0) \\ -2, & x = 0 \\ x, & x \in (0,1) \end{cases}$ έχει:

- $\lim_{x \to 0^+} f_3(x) = 0$
- $\lim_{x \to 0^-} f_3(x) = -\infty$
- $f_3(0) = -2$.
- Δηλαδή η f_3 είναι ασυνεχής στο 0 και δεν έχει πλευρική συνέχεια.

(iv) η $f_4 : f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ έχει:

- $\lim_{x \to 0^+} f_4(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} f_4(x) = +\infty$
- $f(0) = 2$.

Δηλαδή η f_4 είναι ασυνεχής στο 0 και έχει δεξιά και αριστερά όριο το $+\infty$.

(v) η $f_5 : f_5(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ έχει:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f_5(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f_5(x) = -\infty$
- $f(0) = 2$.

Δηλαδή η f_5 είναι ασυνεχής στο 0, και έχει δεξιά και αριστερά όριο το $-\infty$.

(vi) η $f_6 : f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ έχει:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f_6(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f_6(x) = -\infty$
- $f(0) = 0$.

Δηλαδή η f_6 έχει εκατέρωθεν του μηδενός όρια $+\infty$ και $-\infty$ και είναι ασυνεχής στο 0.

18. Είναι γνωστό ότι ισχύει: «Αν η f συνεχής τότε και η $|f|$ συνεχής».
Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης f ορισμένης στο Ñ, η οποία να είναι παντού ασυνεχής, ενώ η $|f|$ να είναι παντού συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f : f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ είναι όπως είδαμε (Β5.1.9) παντού ασυνεχής.

Όμως $|f| : |f|(x) = 1, \ \forall\, x \in$ Ñ είναι προφανώς παντού συνεχής.

19. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης $f :$ Ñ $\to$ Ñ με

$$|f(x)| \leq |x|, \ \forall\, x \in \text{Ñ} \qquad \textbf{(1)}$$

η οποία να είναι συνεχής στο 0 (προκύπτει από το (1)) και η οποία να είναι ασυνεχής $\forall\, x \in$ Ñ $- \{0\}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Για $x = 0$ η (1) δίνει

$$| f(0) | \leq | 0 | \Rightarrow | f(x) | \leq 0 . \qquad (2)$$

Αλλά

$$| f(x) | \geq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Από (2) και (3) έχω $| f(0) | = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Έτσι, εξετάζοντας την συνέχεια στο 0 έχω:

$$| f(x) - f(0) | = | f(x) - 0 | = | f(x) | \leq | x | . \qquad (4)$$

Έτσι, $\forall\ \varepsilon > 0$, λαμβάνοντας $\delta = \varepsilon$.έχω $| x - 0 | < \delta \underset{(4)}{\Rightarrow} | f(x) - f(0) |$ δηλ. η f συνεχής στο 0.

Συνάρτηση που να εκπληροί και τη δεύτερη συνθήκη είναι η

$$f : f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

αφού είναι ασυνεχής $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (βλέπε απόδειξη εφ. 10 παρόντος κεφαλαίου) και

$$| f(x) | = \begin{cases} | x | \leq | x |, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 \leq | x |, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}.$$

Δηλαδή $| f(x) | \leq | x | \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

20. Να αποδείξετε με κατάλληλα αντιπαραδείγματα , ότι δεν αληθεύουν οι παρακάτω ισχυρισμοί.

(i) Αν η f συνεχής στο $(\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $(\alpha, \beta]$

(ii) Αν η f συνεχής στο x_0, τότε και η $\frac{1}{f}$ συνεχής στο x_0

(iii) Αν η f παίρνει θετική τιμή σε κάποιο $x_0 \in \mathsf{D}(f)$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0, στην οποία η f παίρνει θετική τιμή

(iv) Αν η f συνεχής

(v) Αν η f είναι μια συνάρτηση , τότε η g , με $g(x) = f(x^2 + x^3)$ είναι συνεχής

(vi) Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη.

Για κάθε έναν ψευδή ισχυρισμό να γράψετε την επιπλέον συνθήκη ή περιορισμό που απαιτείται ώστε να είναι αληθής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) η $f:(0,1]\to$ Ñ με $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, άρα η f δεν έχει μέγιστο στο πεδίο ορισμού της, επομένως είναι ψευδής.

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα του ισχυρισμού, θα πρέπει η f να ορίζεται σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Η κλειστότητα του διαστήματος αποτελεί μια ικανή συνθήκη, αλλά όχι και αναγκαία.

(ii) Αν $f(x)=x\,/$ Ñ και $x_0=0$, τότε η f είναι συνεχής στο 0, όμως η $\dfrac{1}{f}(x)$ είναι συνεχής στο 0, αφού εκεί δεν ορίζεται.

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα πρέπει κι αρκεί το $f(x_0)\neq 0$.

(iii) Έστω $f(x)=\begin{Bmatrix} -1, & \text{αν} & x\neq 0 \\ +1, & \text{αν} & x=0 \end{Bmatrix}$. Τότε $f(0)=1>0$, αλλά δεν υπάρχει περιοχή του μηδενός για την οποία $f(x)>0$ αφού $f(x)<0\ \ \forall\ x\in$ Ñ $-\{0\}$.

Για να είναι αληθές το συμπέρασμα πρέπει κι αρκεί η f να είναι συνεχής στο x_0.

(iv) Αν $f(x)=\begin{Bmatrix} -1, & \text{αν} & x\neq 0 \\ +1, & \text{αν} & x=0 \end{Bmatrix}$, τότε $f(x^2+x^3)=f(x)$ ασυνεχής.

Για να ισχύει το συμπέρασμα πρέπει **και** η f να είναι συνεχής **και** να ορίζεται η σύνθεση της f με την $h(x)=x^2+x^3$ / Ñ.

(v) Η $f(x)=\text{εφ}x \Big/ \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη φραγμένη, αφού $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \text{εφ}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \text{εφ}x=-\infty$.

Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι φραγμένη είναι να ορίζεται σε κλειστό διάστημα ή αν ορίζεται σε ανοικτό ή ημιανοικτό, να υπάρχουν τα όρια στα ανοικτά άκρα και να είναι πεπερασμένα.

21. Είναι γνωστό, ότι το άθροισμα συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι αυτό είναι σωστό μόνο για πεπερασμένο πλήθος συναρτήσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $f_n(x)=\frac{1}{n}$, $\forall\ x\in$ Ñ, τότε είναι γνωστό ότι ως σταθερές όλες οι f_n $(n\in$ Í$)$ είναι συνεχείς στο Ñ. Όμως

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=+\infty.$$

Δηλαδή το απειροάθροισμα των συναρτήσεων δεν είναι καν συνάρτηση.

Επειδή όμως μπορεί στην εκφώνηση να προστεθεί η φράση *«... όταν έχει νόημα συνάρτησης το άπειρο άθροισμα συναρτήσεων»*, παραθέτουμε ένα περισσότερο καίριο αντιπαράδειγμα.

Θεωρώ τις συναρτήσεις $f_n(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$, $n\in$ Í $/[-1,1]$ οι οποίες είναι όλες συνεχείς στο $[-1,1]$.

Όμως $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}=\log(1+x)/(-1,1]$ (Ανάπτυγμα Mac Laurin).

Η συνάρτηση $\log(1+x)$ δεν ορίζεται στο -1, αλλά ούτε και συνεχής επέκταση στο -1 μπορεί να υπάρξει, αφού $\lim_{x\to-1^-}(1+x)=-\infty$.

Βρήκαμε δηλαδή μια άπειρη οικογένεια συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο $[-1,1]$, αλλά το άπειρο άθροισμά τους είναι συνεχής συνάρτηση μόνο στο $(-1,1]$, ενώ στο -1 δεν είναι δυνατόν να υπάρξει συνεχής επέκταση.

22. Ισχύει η πρόταση, ότι «Αν g συνεχής στο α, και η f συνεχής στο $g(\alpha)$, τότε και η $f\circ g$ συνεχής στο α».

Λόγω αυτής ακριβώς της προτάσεως μπορούμε να γράφουμε $\lim_{x\to\alpha}f(g(x))=f\left(\lim_{x\to\alpha}g(x)\right)=f(g(\alpha))$. Δηλαδή μπορούμε να λέμε ότι πρακτικά «τα σύμβολα του ορίου και της σύνθεσης συναρτήσεως "αντιμετατίθενται"».

Να αποδειχθεί με κατάλληλο παράδειγμα, ότι όταν η f δεν είναι συνεχής στο $g(\alpha)$, τότε γενικά δεν ισχύει το θεώρημα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ:

$$g(x)=x/\text{Ñ}$$

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 0, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{Bmatrix} / \text{Ñ}.$$

Για $\alpha = 0$, έχω:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} fx = 0 \qquad (1)$$

$$f(\lim_{x\to 0} g(x)) = f(0) = 1 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχω $\lim_{x\to 0} f(g(x)) \neq f(\lim_{x\to 0} g(x))$ κι αυτό διότι η f δεν είναι συνεχής στο $g(0)=0$.

23. Να βρεθούν –αν υπάρχουν- δύο συναρτήσεις παντού ασυνεχείς στο Ñ, των οποίων όμως η σύνθεση, να είναι παντού συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την συνάρτηση του Dirichlet

$$f: f(x)=\begin{Bmatrix} 1, & \text{αν} & x & \text{ρητός} \\ -1, & \text{αν} & x & \text{άρρητος} \end{Bmatrix}$$

σε σύνθεση με τον εαυτό της.

Η $f \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $(f \circ f)(x) = 1 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$ η οποία ως σταθερή, είναι συνεχής.

24. Αν η $[f(x)]^2$ είναι συνεχής τι συμπέρασμα εξάγεται για την συνέχεια της $f(x)$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Δεν μπορεί να εξαχθεί κανένα συμπέρασμα, αφού:

Αν $f(x)=x$ (συνεχής $\forall\ x \in$ Ñ) τότε και $[f(x)]^2 = x^2$ είναι επίσης συνεχής $\forall\ x \in$ Ñ.

Όμως, αν $f(x)=\begin{Bmatrix} 1, & \text{αν} & x & \text{ρητός} \\ -1, & \text{αν} & x & \text{άρρητος} \end{Bmatrix}$ είναι ασυνεχής $\forall\ x \in$ Ñ ενώ $[f(x)]^2 = 1$ ως σταθερή είναι συνεχής $\forall\ x \in$ Ñ.

Ένα ημιγενικό παράδειγμα είναι το εξής:

$$f: f(x)=\begin{Bmatrix} g(x), & x\in(-\infty,\alpha) \\ -g(x), & x\in[\alpha,+\infty) \end{Bmatrix}, \text{ όπου } \alpha \in \text{Ñ} \text{ και}$$

η g είναι μια πολυωνυμική (συνεχής) συνάρτηση, η οποία δεν έχει ως ρίζα το α, δηλαδή $g(\alpha) \neq 0$.

Τότε η g παρουσιάζει ασυνέχεια στο α, αφού

$$f(\alpha) = -g(\alpha) = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \neq g(\alpha) = \lim_{x \to \alpha^-} f(x).$$

Όμως $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ που είναι συνεχής $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

25. Υπάρχει συνάρτηση f που να εκπληροί τις παρακάτω συνθήκες:

- **Ορισμένη στο** $(0,1)$
- **Ασυνεχής σε κάθε ρητό του (0,1)**
- **Συνεχής σε κάθε άρρητο του (0,1)**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f : f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{αν} \quad x = \dfrac{m}{n},\ (m,n) = 1,\ n > 0\ m,n \in \mathbb{N} \end{cases}$ εκπληροί όλες τις τεθείσες συνθήκες.

Για να δείξω ότι είναι συνεχής στους αρρήτους του $(0,1)$ πρέπει να δείξω ότι αν x_0 άρρητος , τότε $\exists$ *το* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : 0 <| x - x_0 |< \delta \Rightarrow| f(x) - 0 |< \varepsilon.$$

Δηλαδή ισοδύναμο

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : 0 <| x - x_0 |< \delta \Rightarrow| f(x) |< \varepsilon \qquad (1)$$

Προβαίνω στην ακόλουθη κατασκευή:

Για τον οιονδήποτε $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (Αξίωμα Αρχιμήδους-Ευδόξου) δηλαδή

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon \qquad (2)$$

Σχηματίζω μια διαμέριση του $(0,1)$ με το σύνολο

$$P = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n_0 - 1}{n_0} \right\}.$$

Δηλαδή:

- Το P περιέχει όλα τα ανάγωγα κλάσματα που έχουν παρονομαστές μικρότερους ή ίσους από το n_0.
- Το P έχει ως ελάχιστο στοιχείο του το $\frac{1}{n_0}$ και μέγιστο το $\frac{n_0 - 1}{n_0}$.

Για το $x \in (0,1)$ υπάρχουν τα εξής τρία ενδεχόμενα:

1. Το x είναι άρρητος. Τότε $f(x) = 0$, δηλαδή $|f(x)| = |0| < \varepsilon$, δηλαδή η (1) ισχύει $\forall\ \delta > 0$.
2. ($x \in$ Ð και $x \notin P$). Τότε

$$x = \frac{\kappa_0}{\lambda_0} \text{ και } \lambda_0 > n_0 \qquad (3)$$

(Εκ κατασκευής του P). Τότε όμως θα έχω:

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{\kappa_0}{\lambda_0}\right) \right| = \frac{1}{\lambda_0} \underset{(3)}{<} \frac{1}{n_0} \underset{(2)}{<} \varepsilon \text{ η οποία ισχύει } \forall \delta > 0$$

(αφού το συμπέρασμα $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ισχύει εκ κατασκευής).

3. ($x \in$ Ð και $x \in P$). Τότε $x = \frac{p_0}{\tau_0}$. Εκλέγω τότε $\delta = \min\{|x_0 - x|, x \in P\}$. Είναι $\delta > 0$, διότι $|x_0 - x| \geq 0 \ \ \forall x \in$ Ñ και επίσης επειδή x ρητός και x_0 άρρητος έχω $|x_0 - x| > 0 \ \ \forall x \in P$.

Έτσι λοιπόν αν θεωρήσω τη σχέση $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε το x δεν μπορεί να ανήκει στο P. Θα είναι επομένως κάποιος ρητός της περίπτωσης 2. που εξετάσθηκε άρα και πάλι θα ισχύει $|f(x)| < \varepsilon$, (αλλά όχι για κάθε $\delta > 0$) για $\delta = \min\{|x - x_0|, x \in P\} > 0$. Επομένως $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ για x_0 άρρητο ή ρητό στο $(0,1)$. Επίσης $f(x_0) = 0$ για x_0 άρρητο. Άρα η f συνεχής $\forall x_0 \in (0,1) \setminus$ Ð.

Θα δείξω την συνέχεια και σε κάθε ρητό $x_0 \in (0,1)$. Αν x_0 ρητός, τότε $f(x_0) \neq 0$.

Θεωρώ ακολουθία αρρήτων $x_n : x_n \to x_0$ και $x_n \neq x_0 \ \ \forall n \in$ Í τότε

$$f(x_n) = 0 \to 0 \neq f(x_0).$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στους ρητούς του πεδίου ορισμού της και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Μια επαναληπτική , αλλά αδρή σκιαγράφηση του μη συνήθους τμήματος της απόδειξης ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$***, αν*** x_0 ***άρρητος:***

- $\forall \varepsilon > 0$, και $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Σύμφωνα με το αξίωμα Αρχιμήδους-Ευδόξου $\exists n_0 \in$ Í: $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
- Έστω x_0 άρρητος και $x_0 \in (0,1)$. Στο διάστημα $(0,1)$ υπάρχει πεπερασμένος αριθμός αναγώγων κλασμάτων με παρονομαστή μικρότερο ή ίσο του n_0 (Είναι τα κλάσματα του *P*).
- Το x_0 απέχει από το *κοντινότερο* ανάγωγο κλάσμα του *P* απόσταση $\delta > 0$. Έτσι, θα έχω ότι $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $|f(x)| \le \frac{1}{n_0}$. (Διότι αν x άρρητος $|f(x)| = |0| \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, αν x ρητός θα έχει παρονομαστή μεγαλύτερο από n_0 (έστω λ) οπότε $|f(x_0)| = \left|\frac{1}{\lambda}\right| < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$).

  Επομένως $\forall \varepsilon > 0$, αρκεί να επιλέγω το n_0 και το δ που περιεγράφησαν πριν και θα εκπληρούται ο ορισμός της συζυγίας στο 0, δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

***Περαιτέρω σχόλια για το συγκεκριμένο παράδειγμα*:**

Η f μας δείχνει ακόμα και τα εξής:

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, δεν έπεται ότι θα είναι συνεχής σε κάποια περιοχή του x_0.

  Πράγματι, αν x_0 άρρητος, η f είναι συνεχής στο x_0, αλλά οποιαδήποτε περιοχή του x_0 λόγω της πυκνότητας του Ð στο Ñ, θα περιέχει και ρητούς στους οποίους η f είναι ασυνεχής.
- Μία συνάρτηση όπως η f, μπορεί να είναι συνεχής σε ένα πυκνό σύνολο και ασυνεχής σε ένα άλλο.

  Πράγματι, η f είναι συνεχής στους αρρήτους που είναι πυκνοί στο Ñ και ασυνεχής στους ρητούς που είναι επίσης πυκνοί στο Ñ.

- $\forall \varepsilon > 0$, το δ δεν προκύπτει αναγκαστικά ως αναλυτική έκφραση συνάρτησης του *ε*, αλλά μπορούμε απλώς (όπως απαιτεί κι ο ορισμός) να εξασφαλίζουμε την ύπαρξη του *δ*, όπως κάναμε στην απόδειξη.

26. Υπάρχει και άλλη συνάρτηση με τις ίδιες προϋποθέσεις με την προηγούμενη , δηλ. $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ με την f ασυνεχή σε κάθε ρητό του (0,1) και συνεχή σε κάθε άρρητο του (0,1)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Ως γνωστόν το σύνολο $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Άρα τα στοιχεία του τίθενται σε μια «1-1» και «επί» αντιστοίχιση με το $\mathbb{N}$. Επομένως τα στοιχεία του , θα έχουν την μορφή $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, ...\}$. Ορίζω την f ως εξής:

$f(x) = \sum_{\rho_i \le x} \frac{1}{2^i}$. Το άθροισμα , αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς i για τους οποίους οι ρητοί ρ_i δεν είναι μεγαλύτεροι του x .

Η f είναι ασυνεχής σε κάθε ρητό ρ_κ αφού για κάθε x και για κάθε δ με 0<x< ρ_κ ή $|x-\rho_\kappa|<\delta \Rightarrow |f(\rho_\kappa) - f(x)| \ge \frac{1}{2^\kappa}$ (άρνηση ορισμού της συνέχειας της f στο ρ_κ για ε=$\frac{1}{2^\kappa}$)

Στους αρρήτους του (0,1) η f είναι συνεχής . Πράγματι, αν θεωρήσω τυχόν $x_0 \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ και ε>0 , τότε $\exists n \in \mathbb{N}$, με $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$

Αν $\delta = \min_{1 \le i \le n} |x_0 - \rho_i|$ τότε για κάθε $x \in (0,1)$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει ότι

$|f(x) - f(x_0)| \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$.

5.2. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΟΥΣ

α) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο Ñ.

β) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

γ) Κάθε άρρητη συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

δ) Εκθετική (α^x), λογαριθμική $|x|$ συνάρτηση, ημίτονο συνάρτηση συνημίτονο, είναι συνεχής στο π.ο., τους.

ε) Άθροισμα, διαφορά, πηλίκο, αλγεβρικά αντίστροφη σύνθεση, αντίστροφη, συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Με αυτά μόνο, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία εξαιρετικά μεγάλη οικογένεια συνεχών συναρτήσεων μιας και ιστορικά είναι οι πρώτες που μελετήθηκαν ως εμφανιζόμενες στη φύση, όπου όλα τα φαινόμενα (τουλάχιστον του μακρόκοσμου) είναι “συνεχή” μη κβαντικά, μη ασυνεχή.

Β. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΛΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ*:* Παραθέτουμε μια στοιχειώδη κατασκευή για συνάρτηση με δύο κλάδους (με περισσότερους κάνουμε μια όμοια επέκταση).

- Βρίσκουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις $f/[\alpha,\beta]$ και $g/[\beta,\gamma]$
- Σχηματίζουμε την συνάρτηση h:

$$h(x)=\begin{Bmatrix} f(x), & x\in[\alpha,\beta] \\ g(x), & x\in(\beta,\gamma] \end{Bmatrix}.$$

- Απαιτούμε

$$\lim_{x\to\beta^-} g(x)=f(\beta) \qquad (1)$$

Για να έχει λύση η (1), δεν επιλέγουμε τις f, g τυχαία, αλλά σε μια γενικευμένη τους μορφή. Με αυτό τον τρόπο η εξίσωση (1) όχι μόνο έχει λύση αλλά μπορεί να έχει απειρία λύσεων, οι οποίες αντιστοιχούν σε απειρία παραδειγμάτων συνεχών συναρτήσεων.

Π.χ.

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma\,/[0,1]$$

$$g(x)=\delta x^2+\varepsilon x+\zeta\,/[1,2]$$

$$\lim_{x\to1^-} g(x)=\delta+\varepsilon+\zeta,\quad f(1)=\alpha+\beta+\gamma.$$

Δηλαδή πρέπει κι αρκεί $\delta+\varepsilon+\zeta=\alpha+\beta+\gamma$.

Άρα η f:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta x+\gamma, & x\in[0,1]\\ \delta x^2+\varepsilon x+(\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon), & x\in(1,2]\end{cases}$$

είναι συνεχής, στο πεδίο ορισμού της για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\in$Ñ.

Γ. ΑΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΠΛΗΘΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

- Εκλέγουμε μια συνάρτηση παντού συνεχή, έστω $f(x)/A$
- Ορίζω $g:g(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-\alpha)f(x)}{x-\alpha}, & x\in A\setminus\{\alpha\}\\ \kappa, & x=\alpha\end{cases}$ με $\alpha\in A$, A διάστημα ή ένωση

διαστημάτων και $\kappa\neq f(\alpha)$. Τότε η g έχει την ίδια γραφική παράσταση με την f με την διαφορά ότι είναι ασυνεχής στο α.

Π.χ. Αν, $f(x)=3x/$Ñ

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{3x(x-1)}{x-1}, & x\neq 1\\ 4, & x=1\end{cases}$$

τότε η g γεωμετρικά, είναι η ευθεία $y=3x$ της οποίας το σημείο $(1,3)$ έχει ανυψωθεί κατά μία μονάδα.

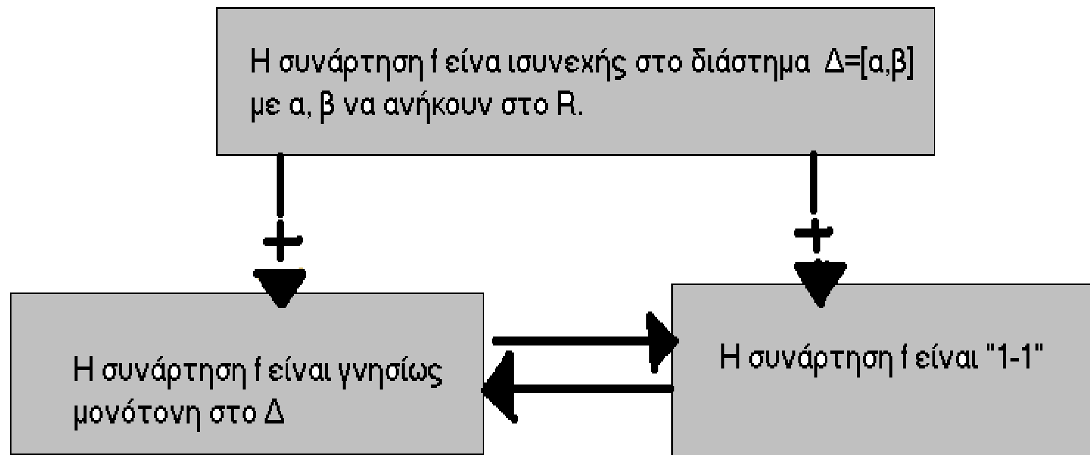
Για περισσότερα σημεία ασυνέχειας κάνουμε ανάλογη εργασία.

Δ. ΣΥΝΕΧΗΣ ΕΠΕΚΤΑΣΗ: Εφόσον υπάρχει ένα όριο της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lambda\in\mathbb{R}$ με $x_0\in\mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του πεδίου ορισμού της $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και $x_0\notin D\left(\dfrac{f}{g}\right)$ τότε έχω συνεχή επέκταση της $\dfrac{f}{g}(x)$ ως ακολούθως:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f}{g}(x), & x\in D\left(\dfrac{f}{g}\right)\\ \lambda, & x=x_0\end{cases}.$$

6. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ : BOLZANO-ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ- ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

6.1. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO



1. Να αποδείξετε με κατάλληλα αντιπαραδείγματα ότι η προϋπόθεση της συνέχειας της f στο $[\alpha,\beta]$ στο θεώρημα Bolzano, είναι ουσιώδης ώστε να ισχύει το συμπέρασμά του.
Συγκεκριμένα:
(i) Η υπόθεση της συνέχειας της f στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ απολύτως αναγκαία
(ii) Επίσης η συνέχεια στα άκρα *α* και *β*.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η προϋπόθεση της συνέχειας της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι ουσιώδης, διότι έστω και σε ένα σημείο x_0 του $[\alpha,\beta]$ να μη είναι συνεχής η *f*, είναι δυνατόν να μην ισχύει το συμπέρασμα της ύπαρξης ρίζας της $f(x)=0$ στο $[\alpha,\beta]$.

(i) Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $f(x)=\begin{cases} -2, & \text{αν } x\in[-1,0) \\ 1, & \text{αν } x=0 \\ 2, & \text{αν } x\in(0,1] \end{cases}$

Για την *f* ισχύουν:

- Είναι ορισμένη στο κλειστό $[-1,1]$
- $f(-1)\cdot f(1)=(-2)(+2)=-4<0$
- Είναι ασυνεχής στο $x_0=0$, αφού

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = +2 \neq 1 = f(0)$$

- Είναι συνεχής $\forall x_0 \in [-1,1]\setminus\{0\}$.

  Όμως $\nexists x \in [-1,1] : f(x) = 0$ μιας και η f εξ ορισμού είναι διάφορη του μηδενός για κάθε $x \in [-1,1]$.

(ii) Για την ασυνέχεια στα άκρα:

Θεωρώ την συνάρτηση $g : g(x) = \left\{\begin{matrix} 2, & \text{αν} & x \in [-1,1) \\ -2, & \text{αν} & x = 1 \end{matrix}\right\}$.

Για την g ισχύουν:

- Είναι ορισμένη στο $[-1,1]$
- $f(-1)\cdot f(1) = 2\cdot(-2) = -4 < 0$
- Είναι ασυνεχής στο $x_0 = 1$, διότι $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq -2 = f(1)$
- Είναι συνεχής $\forall x \in [-1,1)$.

  Όμως (επίσης εξ ορισμού) $f(x) \neq 0 \ \forall x \in [-1,1]$.

  Ανάλογο αντιπαράδειγμα μπορούμε να παραθέσουμε και για ασυνέχεια στο αριστερό άκρο του διαστήματος.

2. «Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) < 1$ και $f(\beta) > 1$, τότε υπάρχει $\kappa \in (\alpha,\beta) : f(\kappa) = 0$».

Να αποδειχθεί η πρόταση αυτή δεν αληθεύει..

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Δεν αληθεύει. Για παράδειγμα , αν $f : \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] \to$ Ñ: με $f(x) = x^2$.

Τότε $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} < 1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} > 1$, όμως η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

3. Να αποδειχθεί ότι η μη ισχύς των υποθέσεων του Θ. Bolzano δεν σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο $[\alpha,\beta]$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) Για την f :[-1,1] $\to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ έχω

- f συνεχής στο $[-1,1]$

- $f(-1)\cdot f(1)=1>0$ (Δεν εκπληρούται προϋπόθεση του Θ. Bolzano) και η $f(x)=0$ έχει ρίζα το 0.

Δηλαδή, παρότι δεν εκπληρούται μία των προϋποθέσεων του Θ.Bolzano, εν τούτοις, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο κλειστό πεδίο ορισμού της $[-1,1]$.

(ii) Για την $g:g(x)=\begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & x\in\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right]\setminus\{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases}$ έχω:

- Είναι συνεχής $x\in\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right]$, διότι απειροστή επί φραγμένη συνάρτηση, δίνει απειροστή και άρα $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\chi\eta\mu\frac{1}{\chi}=g(0)=0$)
- $g\left(-\frac{2}{\pi}\right)\cdot g\left(\frac{2}{\pi}\right)=\left(-\frac{2}{\pi}\right)(-1)\frac{2}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi^2}>0$ και η g έχει *άπειρες ρίζες* στο διάστημα $\left[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}\right]$.

  Δηλαδή το Θ. Bolzano είναι μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ αλλά όχι και αναγκαία.

4. Δείξτε, ότι αν εκπληρούνται οι υποθέσεις του Θ. Bolzano, δεν σημαίνει ότι θα έχω μία μόνο ρίζα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα παραθέσουμε παραδείγματα, όπου εκπληρούνται οι συνθήκες του Θ. Bolzano και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει $n\in$ Í διακεκριμένες ρίζες (n περιττός) από το σύνολο $A=\{\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<...<\alpha_n\}\subseteq$Ñ.

Η $f:f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n)$, $\alpha>0$ ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ όπου $\alpha<\alpha_1$ και $\alpha_n<\beta$ πληροί τις συνθήκες του Θ. Bolzano αφού

- Είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής σε αυτό ως πολυωνυμική.
- $f(\alpha)=(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)...(\alpha-\alpha_n)<0$ αφού κάθε παράγοντας σε παρένθεση είναι αρνητικός και το πλήθος των παραγόντων είναι περιττό.

  $f(\beta)=(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)...(\beta-\alpha_n)>0$ αφού όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί.

  Έτσι $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

  Η $f(x)=0$ έχει n διακεκριμένες ρίζες $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ και όχι μόνο μία.

Το Θ. Bolzano εξασφαλίζει μία *τουλάχιστον* ρίζα.

5. Υπάρχει παράδειγμα συναρτήσεως που δεν πληροί τις συνθήκες της υποθέσεως του Θ. Bolzano, «στον μέγιστο δυνατό βαθμό» ενώ παράλληλα πληροί το συμπέρασμα, επίσης «στον μέγιστο δυνατό βαθμό».

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: «Ιδανικό» παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση του Dirichlet.

$$f : f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \\ 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \end{cases}$$ ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, με $\alpha, \beta \in$ Ñ.

Γι' αυτήν ισχύει:

- $f(\alpha) \cdot f(\beta) \geq 0 \;\; \forall \; \alpha, \beta \in$ Ñ (Δηλαδή η άρνηση της συνθήκης $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$)
- Η *f* ασυνεχής $\forall \, x_0 \in [\alpha, \beta]$ (Δηλαδή δεν είναι συνεχής **ούτε σε ένα** σημείο του πεδίου ορισμού της)

Ως αντίστοιχο «συμπέρασμα» έχουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει **άπειρες ρίζες** στο πεδίο ορισμού της **και μάλιστα υπεραριθμήσιμες!**

Μάλιστα, και το πεδίο ορισμού μπορεί να θεωρηθεί απεριόριστα μικρού πλάτους (δηλαδή $\beta - \alpha < \varepsilon, \;\; \forall \varepsilon > 0$) χωρίς να επηρεάζονται αυτά που ισχύουν για την συνάρτηση αυτή.

6.2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

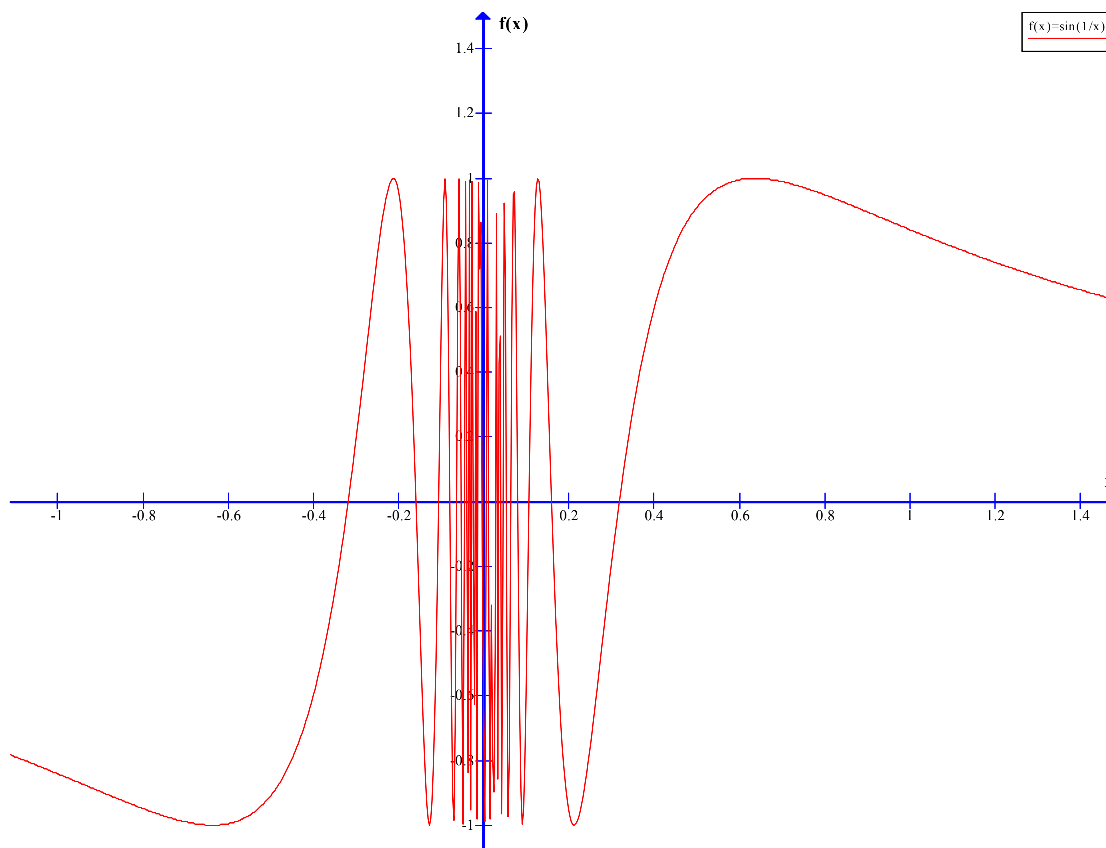
1. Να εξετασθεί αν υπάρχει συνάρτηση για την οποία να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών χωρίς η συνάρτηση να είναι συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \begin{cases} 1 - x, & \alpha\nu \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -1 - x, & \alpha\nu \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}$

Τότε $h((-1,1]) = (-1,1]$, ενώ η h ασυνεχής στο $x_0 = 0$.

Ένα άλλο αρκετά πιο σύνθετο παράδειγμα όπου όμως το συμπέρασμα ισχύει σε οσοδήποτε μικρό διάστημα που περιέχει το 0 και η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 0 είναι το εξής:

Έστω η συνάρτηση $f : f(x) = \begin{cases} \text{ημ}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει ότι δεν είναι συνεχής στο 0.



Άρα κάθε περιορισμός της f σε διάστημα της μορφής $\left(-\frac{\pi}{10^{\nu}}, \frac{\pi}{10^{\nu}}\right)$, $(n \in \mathbb{N})$ θα είναι επίσης ασυνεχής συνάρτηση. Το συμπέρασμα του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών, ισχύει για κάθε περιορισμό της f στα ανωτέρω διαστήματα.

Πράγματι, έστω $f(x_1)$, $f(x_2)$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$ και $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{10^{\nu}}, \frac{\pi}{10^{\nu}}\right)$.

Τότε $-1 \leq f(x_1) < f(x_2) \leq 1$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Θα δείξω ότι η f, μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή *κ* μεταξύ των $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Διακρίνω περιπτώσεις:

1) Αν τα x_1, x_2 είναι ή και τα δύο δεξιά του μηδενός ή και τα δύο αριστερά του μηδενός, τότε στο $[x_1, x_2]$ εφαρμόζεται το Θ.Ε.Τ αφού η $f/[x_1, x_2]$ είναι συνεχής.

2) Αν τα x_1, x_2 είναι εκατέρωθεν του μηδενός, τότε θεωρώ την ακολουθία $x_n = \dfrac{1}{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$, $x_\kappa \neq 0 \ \forall \kappa \in \mathbb{N}$. Αυτή, οσοδήποτε κοντά στο 0, έχει άπειρους όρους της. Δηλαδή στο διάστημα $(-|x_0|, +|x_0|)$ περιέχονται άπειροι όροι της

K_κ, όπου $|x_0| = \min\{|x_1|,|x_2|\}$. Δηλαδή $x_\kappa \in (-|x_0|,|x_0|)\ \forall \kappa \geq \kappa_0$, άρα και για $\kappa \geq 2\kappa_0$.

Όμως $f(x_{2\kappa_0}) = \text{ημ}\left(2\kappa_0\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ και $f(x_{2\kappa_0+1} = \text{ημ}\left[(2\kappa_0+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right] = -1$ στο διάστημα $A = [x_{2\kappa_0}, x_{2\kappa_0+1}] \subset (-|x_0|,|x_0| \subset (x_1, x_2)$ η f/A είναι συνεχής και άρα λαμβάνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_{2\kappa_0})$ και $f(x_{2\kappa_0+1})$. Επομένως κατά μείζονα λόγο και μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.

3) Αν $x_1 = 0$ ή $x_2 = 0$, θεωρώ το διάστημα (αναλόγως) $(0, x_1)$ και την ακολουθία $x_n = \dfrac{1}{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}$ και εργάζομαι όπως προηγουμένως.

Αν το διάστημα είναι της μορφής $(x_1, 0)$ θεωρώ την ακολουθία $x'_n = -\dfrac{1}{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}$ και εργάζομαι ομοίως.

2. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο του Θ.Ε.Τ. δηλαδή: «Αν για την μη σταθερή $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\forall x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(x_1)$, $f(x_2)$, τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.»

Αν δεν ισχύει, να διατυπώσετε πρόσθετη συνθήκη, ώστε να ισχύει το συμπέρασμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η συνάρτηση $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός και } x \in [0,1] \\ -x+2, & \text{αν } x \text{ άρρητος και } x \in (1,2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Η f είναι ασυνεχής $\forall x \in [0,2] \setminus \{1\}$ και συνεχής στο 1 *(Η απόδειξη ανάλογη με προηγούμενες ομοειδείς)*
- Η f έχει μέγιστο στο $f(1) = 1$ και ελάχιστο το 0. Δηλαδή $0 \leq f(x) \leq 1$ $\forall x \in [0,2]$.

Η f λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή κ μεταξύ 0 και 1.

- Αν κ άρρητος $\exists x_0 \in$ Ñ: $x_0 = \kappa - 2$, x_0 άρρητος, $1 < x_0 < 2 (\Leftrightarrow 1 < \kappa < 2)$ και $f(x_0) = -(\kappa - 2) + 2 = \kappa$
- Αν κ ρητός, $\exists x_0' \in$ Ñ: $x_0' = \kappa$, $x_0' \in (0,1)$, x_0 ρητός και $f(x_0') = \kappa$.

Για να ισχύει το συμπέρασμα, θα πρέπει να υπάρχει και η συνθήκη για το γνησίως μονότονο της f.

6.3. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ, ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

1. Να εξετασθεί αν αληθεύει η παρακάτω πρόταση: «Αν $f:\Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι ψευδής.

Ως αντιπαράδειγμα έχω:

$f:[0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, είναι συνεχής στο $[0,1)$ αλλά δεν έχει μέγιστη τιμή , αφού $\sup\{f(x): 0 \le x < 1\} = 1$ και $\nexists\ x \in [0,1): f(x) = x^2 = 1$.

Ένα δεύτερο αντιπαράδειγμα είναι το εξής:

. η $f: f(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} \Big/ (\alpha, \beta)$.

Για την f ισχύουν

- $f(x) < 0\ \forall\, x \in (\alpha, \beta)$ και συνεχής στο αυτό.
- Στην θέση $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ έχω ολικό μέγιστο, δηλαδή $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \ge f(x)\ \forall\, x \in (\alpha, \beta)$
- $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x \to \beta} f(x) = \lim\limits_{x \to \beta^-} f(x)$

Δηλαδή η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, έχει μέγιστο, αλλά δεν έχει ελάχιστο. Συνεπώς η πρόταση είναι ψευδής, αφού βρήκαμε συνάρτηση εκπληρούσα τις υποθέσεις της προτάσεως, αλλά όχι το συμπέρασμά της.

Ένα τρίτο αντιπαράδειγμα είναι η

$g: g(x) = \text{εφ}x \Big/ \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ η οποία:

- Είναι συνεχής σε κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

- Δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο, καθώς $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^{+}} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^{-}} f(x) = +\infty$. Δηλαδή δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένη.

Να σημειώσουμε, ότι η πρόταση είναι αληθής για κλειστά διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$.

2. Είναι γνωστή η ισχύς της προτάσεως: «Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό $[\alpha,\beta]$, τότε η f έχει ένα ολικό μέγιστο και ένα απόλυτο ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$.»

Να δείξετε τα εξής:

1) Η υπόθεση της συνέχειας στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ είναι απαραίτητη για την ισχύ του θεωρήματος

2) Η υπόθεση της συνέχειας στα άκρα του διαστήματος είναι επίσης απαραίτητη.

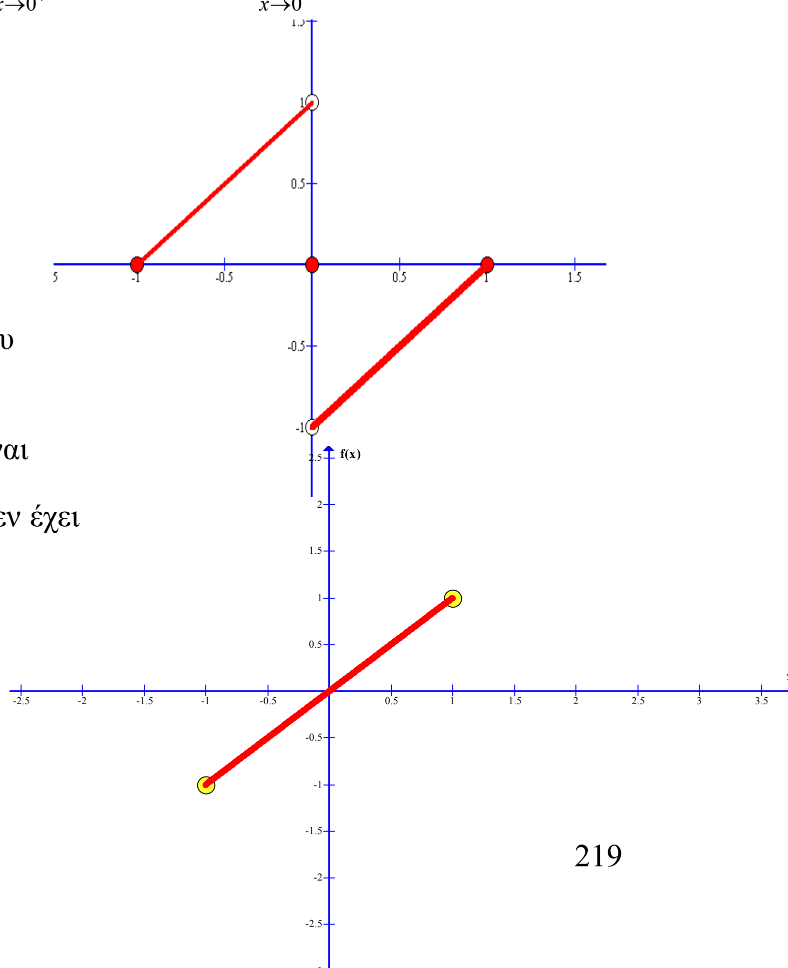
3) Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1) Έστω $f : f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x\in[-1,0) \\ 0 & \text{αν } x=0 \\ x-1 & \text{αν } x\in(0,1] \end{cases}$. Η f είναι ασυνεχής μόνο στο σημείο $x_0 = 0$, διότι $f(0) = 0 \neq \lim\limits_{x\to 0^{+}} f(x) = -1 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 0^{-}} f(x)$ και ως έχουσα πολυωνυμικούς κλάδους είναι συνεχής στα διαστήματα που ορίζονται αυτοί.

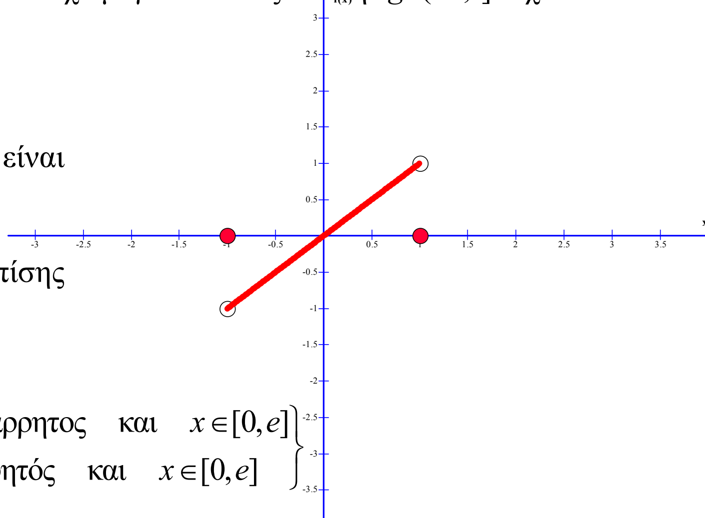
Η f δεν έχει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, και γι' αυτό αρκούσε η ασυνέχεια σε ένα μόνο σημείο του πεδίου ορισμού της.

Πράγματι, το πεδίο τιμών της είναι το $(-1,1)$ το οποίο ως ανοικτό, δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο.



2) Έστω $g: g(x) = x/(-1,1)$. Η f συνεχής $\forall x \in (-1,1)$ αλλά το πεδίο τιμών της είναι επίσης το $(-1,1)$ όπου εκεί δεν έχω ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο.

Επίσης η $g/[-1,1)$ έχει ελάχιστο αλλά όχι μέγιστο όπως και η $g/(-1,1]$ έχει μέγιστο, αλλά όχι ελάχιστο.

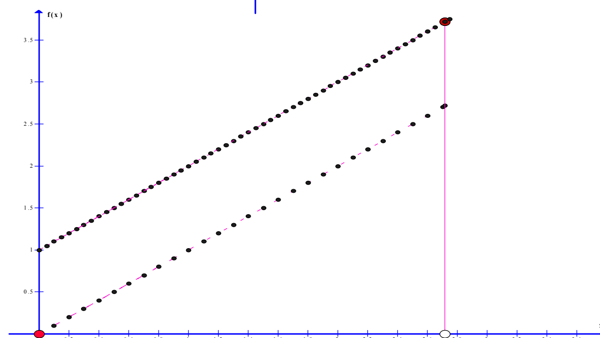


Επίσης αν $h(x) = \begin{cases} g(x), & x \in (-1,1) \\ 0, & x = -1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ είναι ορισμένη στο $[-1,1]$ και δεν έχει επίσης μέγιστο ή ελάχιστο.

3) Η συνάρτηση $\phi: \phi(x) = \begin{cases} x+1. & x \text{ άρρητος και } x \in [0,e] \\ x, & x \text{ ρητός και } x \in [0,e] \end{cases}$

$f(e) = 1 + e$ έχω ολικό μέγιστο

$f(0) = 0$ έχω ολικό ελάχιστο.



Ενώ η f είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του $[0,e]$. Άρα δεν ισχύει το αντίστροφο.

3. Ως πόρισμα της προηγούμενης πρότασης είναι ότι «Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$».

Να αποδείξετε τα εξής:

1) Η προϋπόθεση της συνέχειας είναι απολύτως απαραίτητη ώστε να ισχύει το συμπέρασμα

2) Να εξεταστεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1) Η συνάρτηση $f: f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ \alpha, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ασυνεχής μόνο στο σημείο $x_0 = 0$ διότι $f(0) = \alpha \neq -\infty = \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq +\infty = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$. Η ασυνέχεια όμως μόνο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, αρκεί ώστε να την καθιστά ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη.

2) Το αντίστροφο δεν ισχύει, αφού α.χ. η συνάρτηση του Dirichlet $f: f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός και} \quad x\in[\alpha,\beta] \\ 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος και} \quad x\in[\alpha,\beta]\end{cases}$ είναι φραγμένη, (αφού $0\le f(x)\le 1 \ \ \forall x\in[\alpha,\beta]$) αλλά είναι ασυνεχής, στο $[\alpha,\beta]$.

4. Ισχύει η πρόταση: «Αν η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$, τότε είναι "$1-1$" και "επί" του $[f(\alpha),f(\beta)]$ ή $[f(\beta),f(\alpha)]$».

1) Να αποδείξετε, ότι η συνέχεια και η γνήσια μονοτονία, είναι απολύτως απαραίτητες υποθέσεις για την ισχύ του συμπεράσματος.

2) Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1) α) Η $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ *με* $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν} \quad x\in[0,1) \\ x, & \text{αν} \quad x\in[1,2]\end{cases}$ είναι

- Ορισμένη στο $[0,2]$
- Συνεχής $\forall x\in[0,2]$ όπως εύκολα διαπιστώνεται
- Παρατηρούμε, ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη , αφού $0<1$ και $f(0)=f(1)=1$.

Η f, δεν είναι "$1-1$", αφού $f(0)=f(1)=1$ και $0\ne 1$

β) Η $g: g(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1) \\ 2x, & x\in[1,2]\end{cases}$ είναι

- Ορισμένη στο $[0,2]$
- Συνεχής $\forall x\in[0,2]\setminus\{1\}$
- Ασυνεχής μόνο στο $x=1$
- Γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$

Όμως η g *δεν είναι "επί"* του $[f(0),f(2)]=[0,4]$ αφού $\frac{3}{2}\in[0,4]$ όμως δεν υπάρχει $x\in[0,2]: f(x)=\frac{3}{2}$. Πράγματι, αν $f(x)=\frac{3}{2}$ τότε

$$\begin{cases} \text{ή } x=\dfrac{3}{2}, \text{ απορρίπτεται αφού } \dfrac{3}{2}\notin[0,1] \\ \text{ή } 2x=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}, \text{ απορρίπτεται αφού } \dfrac{3}{4}\notin[1,2] \end{cases}.$$

Συνοψίζοντας, φθάνει ένα σημείο ασυνέχειας ώστε η συνάρτηση να μη είναι "επί" και φθάνει επίσης η απλή μονοτονία, έτσι ώστε η συνάρτηση να μην είναι "$1-1$".

3) Η $h: h(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\in[0,1)\cup(2,3] \\ -x+3, & \text{αν } x\in[1,2] \end{cases}$. Η h έχει τις ιδιότητες:

- Ορίζεται στο $[0,3]$
- Έχει πεδίο τιμών $[f(0),f(3)]=[0,3]$
- Είναι "$1-1$" και "επί" του $[0,3]$.

Όμως η h δεν είναι γνησίως μονότονη, όπως φαίνεται και από το διάγραμμά της.

5. Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που δεν είναι μονότονη και ο περιορισμός της σε κάθε ανοικτό διάστημα (α,β) να μην είναι μονότονη;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ τη $f: f(x)=\begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ -1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$ που είναι ορισμένη στο Ñ. Τότε σε κάθε $(\alpha,\beta)\subset$ Ñ υπάρχει ρητός και άρρητος λόγω της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων στο Ñ. Άρα αν $\alpha<\beta$, τότε $\exists\, p_1,p_2\in$ Ð και $\kappa\in$ Ñ\Ð: $\alpha<p_1<\kappa<p_2<\beta$ και $(f(p_1)=-1<f(\kappa)=1$ και $f(\kappa)=1>f(p_2)=-1)$.
Δηλαδή η f δεν είναι μονότονη σε κάθε διάστημα (α,β),

6. Να αποδειχθεί, ότι η αντίστροφη συνάρτηση μιας "$1-1$" και συνεχούς συναρτήσεως, δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής συνάρτηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ τη συνάρτηση $f:[0,1)\cup[2,3]\to[0,2]$ με $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\in[0,1) \\ x-1, & \text{αν } x\in[2,3] \end{cases}$. Η f είναι συνεχής, διότι στα δύο υποδιαστήματα

του πεδίου ορισμού της είναι συνεχής και δεν υπάρχει κοινό σ.σ. των δύο διαστημάτων.

Η f είναι “$1-1$”, διότι:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2\\ x_1=x_2-1\Rightarrow x_2-x_1=1 \text{ απορρίπτεται αφού } x_2-x_1>1\\ x_1-1=x_2 \text{ (ομοίως απορρίπτεται)}\end{cases}$$

$\forall x_1\in[0,1),\ x_2\in[2,3]$.

Η f έχει πεδίο τιμών το $[0,2]$ και είναι επί σε αυτό. $\exists$ η $f^{-1}:[0,2]\to$Ñ και $f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & y\in[0,1]\\ y+1, & y\in[1,2]\end{cases}$ η οποία είναι ασυνεχής στο 1, αφού $f^{-1}(1)=2\neq\lim\limits_{y\to1^-}f^{-1}(y)=1$.

6.4. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑΤΩΝ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO:

α) Κατασκευή συνάρτησης και διαστήματος στο οποίο εφαρμόζεται το Θ. Bolzano.
Αρκεί να πάρουμε δύο σημεία εκατέρωθεν μιας ρίζας μιας εξίσωσης.
Υπάρχουν αρκετοί τρόποι γι’ αυτό. Παραθέτουμε έναν κατασκευαστικά εύκολο, με την έννοια ότι το παράδειγμα μπορεί να παραχθεί στιγμιαία από μνήμης.

- Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο οποιουδήποτε βαθμού αρκεί οι συντελεστές του να έχουν άθροισμα 0.
- Αυτό το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1.
- Άρα το Θ. Bolzano εφαρμόζεται στο διάστημα [0, 2] που περιέχει το 1, δεδομένου ότι η πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.

Π.χ. $f(x)=3x^7-4x^2+2x-1$ (Ο τελευταίος όρος, το -1, είναι αντίθετο του αθροίσματος των προηγούμενων συντελεστών που έχουν ληφθεί εντελώς τυχαία)

- $f(1)=0$ κλπ.

β) Ανάλογα εργαζόμαστε και για μη πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Π.χ. $$\text{συν}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$2\text{συν}\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}=2\Rightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}=1\Rightarrow$$

$$(\kappa+1)\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}-1\right)=0\Rightarrow$$

$$2\kappa\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{4}-\kappa-1=0\,.$$

Άρα, αν θεωρήσω την συνάρτηση

$$(\alpha=2)\quad f(x)=2\kappa\sigma\upsilon\nu^2 x+2\sigma\upsilon\nu^2 x-\kappa-1\Big/\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Σε αυτήν θα εφαρμόζεται το Θ. Bolzano αφού $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ εκ κατασκευής.

γ) Υπάρχουν και γενικές θεωρητικές ασκήσεις στο Θ. Bolzano, μια ειδική περίπτωση των οποίων μπορεί να τίθεται ως άσκηση.

Π.χ. «Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$, να δείξετε ότι υπάρχουν $x,y\in[\alpha,\beta]$ με $|y-x|=\frac{\beta-\alpha}{2}$ και $f(x)=f(y)$».

Μια ειδική περίπτωση της παραπάνω άσκησης διατυπώνεται ως εξής:

«Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, συνεχής με $f(0)=f(1)$, τότε να δείξετε ότι $\exists\ x_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$: $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{2}\right)$».

Υπόδειξη: Εφαρμόζω Θ. Bolzano στην $F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ κλπ.

Για τη γενική περίπτωση, ομοίως θεωρώ $F(x)=f(x)-f(y)$ και εκφράζω το y συναρτήσει του x, εργαζόμενος αναλόγως.

δ) Ειδικές περιπτώσεις της γενικής άσκησης. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\frac{A(x)}{x-\alpha}+\frac{B(x)}{x-\beta}=0\,,\qquad (1)$$

$\alpha<\beta$, $x\neq\alpha$, $x\neq\beta$, $A(x),B(x)>0\quad\forall x\in[\alpha,\beta]$. Τότε η (1) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Υπόδειξη: Απαλείφουμε τους παρονομαστές στην (1), θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση f όπου εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano.

ε) Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ και $m,n\in\mathbb{N}^*$ τότε $\exists\ x_0\in(\alpha,\beta): f(x_0)(m+n)=mf(\alpha)+nf(\beta)$ (Μια οποιαδήποτε ειδική περίπτωση).

στ) Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

ζ) Η εξίσωση $\alpha\eta\mu x - x + \beta = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,\alpha+\beta]$, $(\alpha,\beta>0)$.

η) Η εξίσωση

$$\frac{\kappa_1}{x-\alpha_1}+\frac{\kappa_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{\kappa_n}{x-\alpha_n}=0 \qquad (1)$$

με $\kappa_i>0\ \ \forall\, i=1(1)n$, α_i πραγματικοί έχει $n-1$ ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους. (Μία άλλη γενίκευση του *δ*))

7. ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

7.1. ΟΡΙΣΜΟΣ , ΣΥΝΘΗΚΗ LIPSCHITZ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Να δοθεί παράδειγμα συναρτήσεων: $f / A \subseteq$ Ñ και $f / B \subseteq$ Ñ που να είναι και οι δύο συνεχείς.
Η f στο A να είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο B να μη είναι.
Να εξηγηθεί γιατί συμβαίνει αυτό και να δοθεί απόδειξη της μη ομοιόμορφης συνέχειας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

- Θεωρώ την $f : f(x) = x^2 /[-\alpha,\alpha]$ ($\alpha > 0$) η οποία είναι προφανώς συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$. Έχω:

$$| f(x) - f(y) | = | x^2 - y^2 | = | x - y || x + y | \leq 2\alpha | x - y | \quad (1)$$

Έτσι, $\forall \varepsilon > 0$, θεωρώ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$ (το δ εξαρτάται μόνο από το ε) για το οποίο έχω:

$$| x - y | < \delta \Rightarrow$$

$$| x - y | < \frac{\varepsilon}{2\alpha} \Rightarrow$$

$$2\alpha | x - y | < \varepsilon \Rightarrow \quad (1)$$

$$| f(x) - f(y) | < \varepsilon,$$

δηλαδή η $f /[-\alpha,\alpha]$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

- Θεωρώ τώρα την $f : f(x) = x^2$ / Ñ, η οποία είναι συνεχής. Θα δείξω ότι δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πρώτα όμως θα δώσουμε μια εξήγηση για την αδυναμία απόδειξης της ομοιόμορφης συνέχειας στο Ñ.

  Προηγουμένως καταλήξαμε στην (1) εκμεταλλευόμενοι το ότι η παράσταση $| x + y |$ είναι φραγμένη στο $[-\alpha,\alpha]$. Στο Ñ όμως η παράσταση $| x + y |$ δεν είναι φραγμένη. Συνεπώς, όσο μικρό κι αν επιλέξουμε το δ (δηλαδή την διαφορά $| x - y |$) επειδή το $| x + y |$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο, τότε και η $| x + y | \cdot | x - y | = | f(x) - f(y) |$ μπορεί να ξεπεράσει οποιονδήποτε αριθμό.

Δίνουμε τώρα την απόδειξη της μη ομοιόμορφης συνέχειας αυστηρά:
Θα δείξω, ότι για δεδομένο ε (π.χ. $\varepsilon = 2$) δεν υπάρχει $\delta > 0$ που να ικανοποιεί τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας $\forall x \in$ Ñ.

Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι

$$\exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2 \qquad (2)$$

Η (2) ισχύει για το δ και για κάθε μικρότερό του θετικό, άρα και για $0 < \theta < \delta$.

Εκλέγω $x = \theta$, $y = \theta + \dfrac{1}{\theta}$. Τότε

$$|x - y| = \theta < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2 \Rightarrow$$

$$\left|\theta^2 - \left(\theta + \frac{1}{\theta}\right)^2\right| < 2 \Rightarrow$$

$$\left|\theta^2 - \theta^2 - 2 - \frac{1}{\theta^2}\right| < 2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\theta^2} < 0 \text{ άτοπο.}$$

2. Να δοθεί παράδειγμα συναρτήσεως f με πεδίο ορισμού το Ñ που να είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f : f(x) = \text{ημ}x \,/\, Ñ$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Ñ. Πράγματι,

$$|\text{ημ}x - \text{ημ}y| = \left|2\text{ημ}\frac{x-y}{2} \quad \text{συν} \quad \frac{x-y}{2}\right| \le 2\left|\text{ημ}\frac{x-y}{2}\right| \cdot 1 \le 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|$$

(2)

Άρα Αν $\varepsilon > 0$, επιλέγω $\delta = \varepsilon$, οπότε $|x - y| < \delta \underset{(1)}{\Rightarrow} |\text{ημ}x - \text{ημ}y| < \varepsilon$, και άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής .

<u>Παρατήρηση:</u> Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, παίζει καθοριστικό ρόλο στην ομοιόμορφη συνέχεια: π.χ. η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, ενώ αν την περιορίσω για $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, η $f / [0,2]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης f ορισμένης σε ανοιχτό και φραγμένο διάστημα, η οποία να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f : f(x) = \dfrac{1}{x} \Big/ (0,1)$

1ος ΤΡΟΠΟΣ:

Έστω $\varepsilon = 1 > 0$. Θα δείξω ότι για τον συγκεκριμένο ε, δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να εκπληρούται ο ορισμός $\forall\, x, y \in (0,1)$.

Επιλέγω $x = \delta \in (0,1)$ και $y = \frac{\delta}{2} \in (0,1)$. Το δ μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό, θετικό και μικρότερο του ε $(0 < \delta < \varepsilon)$. Τότε

$$|x - y| = \left|\delta - \frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}\right| = \frac{1}{\delta} > \varepsilon = 1.$$

Η (1) ισχύει $\forall\, \delta > 0$.

Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2ος ΤΡΟΠΟΣ: Θα δείξω το μη ομοιόμορφο της σύγκλισης με την άρνηση του ακολουθιακού ορισμού.

Θεωρώ ακολουθίες $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n = \frac{1}{n+1}$ για τις οποίες ισχύει

$$\lim(x_n - y_n) = \lim\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

ενώ

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n - n + 1)| = 1 \not\to 0.$$

Επομένως η $f(x) = \frac{1}{x}\Big/(0,1)$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. Να δειχθεί, ότι το γινόμενο δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων , δεν είναι κατ΄ ανάγκην ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $f(x) = x /$ Ñ, $g(x) = f(x)$.

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, διότι $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ είναι

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \le |x - y| \qquad (1)$$

Η (1) είναι μία συνθήκη Lipschitz για κ=1 , οπότε η f συγκλίνει ομοιόμορφα.

Ή με άλλο τρόπο (με βάση τον ορισμό) έχω :

Αν ε>0 , τότε ∃ δ=ε , ώστε αν |x-y|<δ $\underset{(1)}{\Rightarrow} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ και η f, συγκλίνει ομοιόμορφα.

Η $(f \cdot g)(x) = x^2$ όμως (βλ. εφ. 1 του παρόντος κεφαλαίου) δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Μια συνθήκη ικανή που πρέπει να εκπληρούται για να είναι και το γινόμενο δύο συναρτήσεων ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, είναι οι f, g να είναι φραγμένες.

5. Να δοθεί παράδειγμα όπου η f ομοιόμορφα συνεχής αλλά η $\frac{1}{f}$ να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f(x) = x$ / Ñ είναι ομοιόμορφα συνεχής, όμως η $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{x}\Big/\mathbb{R}^*$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (βλ. εφ. 3 του παρόντος κεφαλαίου)

6. Είναι γνωστό ότι «Αν μία συνάρτηση ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz, είναι ομοιόμορφα συνεχής».
Να αποδειχθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της ανωτέρω πρότασης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f:[0,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής και επειδή ορίζεται σε κλειστό διάστημα , θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω ότι η f πληροί και τη συνθήκη Lipschitz. Τότε, $\exists \kappa > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \le \kappa |x - y|, \ \forall x, y \in [0,2] \qquad (1)$$

Για $y = 0$, από την (1) έχω ότι

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \le \kappa \cdot |x - 0| \Leftrightarrow$$

$$|\sqrt{x}| \le \kappa |x|, \ \forall x \in [0,2] \Rightarrow$$

$$\frac{|\sqrt{x}|}{|x|} \le \kappa, \ \forall x \in (0,2]$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \le \kappa, \quad \forall \ x \in (0,2]. \qquad (2)$$

Όμως $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$ (άρα και για $\varepsilon = \kappa$) $\exists \delta > 0$

$$x \in (0, \delta) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} > \kappa . \qquad (3)$$

Η (3) συνιστά αντίφαση σε σχέση με την (2) που υποθέσαμε ότι ισχύει.

Επομένως δεν υπάρχει κ που να πληροί την (2) δηλαδή η f δεν πληροί καμία συνθήκη Lipschitz.

7. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει συνεχής και φραγμένη συνάρτηση, η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f:$Ñ$\to$Ñ με $f(x)=\text{συν}(x^2)$. Είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων συνx και x^2.

Επίσης είναι φραγμένη αφού $-1\leq \text{συν}(x^2)\leq 1,\ \forall\, x\in$Ñ. Θα δείξω ότι δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θεωρώ τις ακολουθίες $x_n=\sqrt{n\pi}$, $y_n=\sqrt{(n+1)\pi}$. Τότε

$$x_n-y_n=\sqrt{n\pi}-\sqrt{(n+1)\pi}=\frac{-\pi}{\sqrt{n\pi}+\sqrt{(n+1)\pi}}\to 0$$

ενώ

$$|f(x_n)-f(y_n)|=|\text{συν}n\pi-\text{συν}(n+1)\pi|=\begin{cases}|1-(-1)|=2\\ |-1-(+1)|=2\end{cases}=2\not\to 0\,.$$

Επομένως η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

7.2. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ :

α) Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ είναι και ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό.

β) Αν $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ με α>0 είναι ομοιόμορφα συνεχής , τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f που ικανοποιεί μία συνθήκη του Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής.

δ) Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ανοικτό ή ημιανοικτό και φραγμένο διάστημα, για την οποία υπάρχουν τα όρια στα άκρα του διαστήματος και είναι πεπερασμένα, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ε) Κάθε περιοδική και συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

στ) Αν f, g ομοιόμορφα συνεχείς, τότε

(i) $f+g$ ομοιόμορφα συνεχής,

(ii) $f\circ g$ ομοιόμορφα συνεχής με την επιπλέον προϋπόθεση να είναι φραγμένες οι f, g

(iii) Η $\frac{1}{f}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής, εφόσον $|f(x)|\geq\delta,\ \forall\ x\in D(f)$ για κάποιο δ>0.

8. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

8.1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ:

1.Είναι γνωστό από την μαθηματική βιβλιογραφία, , ότι η παράγωγος , ορίζεται σε σημείο x_0 ενός <u>διαστήματος Δ</u> στο οποίο το x_0 είναι σ.σ.

Υπάρχει όμως αριθμήσιμο σύνολο (δηλ. όχι διάστημα) , όπως και κατάλληλα ορισμένη συνάρτηση f , στο οποίο μπορεί να ορισθεί παράγωγος (με τον ίδιο τρόπο) σε ένα σημείο του x_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Τα σημείο στο οποίο ορίζεται η παράγωγος, θα πρέπει υποχρεωτικά να είναι σ.σ. του $D(f)$, άλλως δεν έχει νόημα το όριο μέσω του οποίου ορίζεται η παράγωγος.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το εξής:

$$f: A \to Ñ \text{ με } f(x) = x$$

όπου $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in Í \right\} \cup \{0\}$.

Μοναδικό σ.σ. του A είναι το 0, για το οποίο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x_n) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{f(x_n) - 0}{x_n} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{x_n}{x_n} = \lim_{\nu\to+\infty} 1 = 1.$$

Άρα $f'(0) = 1$.

- *Επομένως, η συνήθης νοητική αναπαράσταση- πρότυπο για την παραγωγισιμότητα ως της λείας γραμμής, σε κάθε σημείο της οποίας μπορεί να υπάρξει εφαπτομένη ευθεία, δεν έχει εφαρμογή εδώ. Βεβαίως, αυτή η τροποποιημένη έννοια της παραγώγου , έχει να κάνει μόνο με την ιδιαιτερότητα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και δεν έχει μαθηματική εφαρμογή ή άλλο ενδιαφέρον.*
- *Να παρατηρήσουμε ακόμα ότι η f είναι συνεχής στο A.*

2. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης, η οποία να ορίζεται στο Ñ και να παραγωγίζεται σε ένα μόνο σημείο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ορίζουμε $f: Ñ \to Ñ$ με

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

θα δείξουμε το παραγωγίσιμο στο 0.

$f(0)=0$ (το 0 είναι ρητός).

Πρέπει να υπάρχει το

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}. \qquad (1)$$

Θεωρώ x_n ακολουθία ρητών, με $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0, \quad \forall n \in$ Í , τότε

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{0}{x_n}=0.$$

Θεωρώ y_n ακολουθία άρρητων, με $y_n \to 0$ και $y_n \neq 0, \quad \forall n \in$ Í , τότε

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(y_n)}{y_n}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{y_n^2}{y_n}=\lim_{\nu\to+\infty}y_n=0.$$

Επομένως, όταν αυτό ισχύει για κάθε ακολουθία ρητών και για κάθε ακολουθία αρρήτων, τότε θα ισχύει και για οποιαδήποτε ακολουθία (βλέπε Β5.1.11&12).

Άρα , $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=0$.

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη πουθενά αλλού, αφού αν ήταν θα ήταν και συνεχής εκεί, αλλά μπορεί να αποδειχθεί (βλ.Β5.1.10 &15), ότι η f είναι συνεχής μόνο στο $x_0=0$, όπου τυχαίνει να είναι και παραγωγίσιμη.

3. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης, η οποία να ορίζεται στο Ñ, να είναι συνεχής σε ένα μόνο σημείο της και να μην παραγωγίζεται σ΄ αυτό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f:$Ñ $\to$ Ñ με $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$.

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 0, θα πρέπει για κάθε ακολουθία $x_n \to 0$, να υπάρχει το $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}$ και να έχει μοναδική τιμή.

Όμως, αν x_n ακολουθία ρητών, με ψ, τότε $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{0}{x_n}=0$.

Αν όμως y_n ακολουθία αρρήτων, με $y_n \to 0$ και $y_n \neq 0, \quad \forall n \in$ Í , τότε

$$\lim_{v\to+\infty}\frac{f(y_n)}{y_n} = \lim_{v\to+\infty}\frac{y_n}{y_n} = \lim_{v\to+\infty} 1 = 1.$$

Άρα δεν υπάρχει παράγωγος στο 0

Επίσης, πουθενά αλλού δεν υπάρχει παράγωγος, αφού αν υπήρχε κάπου, θα έπρεπε εκεί να ήταν συνεχής η f, πράγμα άτομο, αφού η f έχουμε δείξει ( ) ότι είναι ασυνεχής παντού πλην του 0.

4. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης η οποία:

- **Να είναι παντού συνεχής στο Ñ.**
- **Να παραγωγίζεται σε ένα μόνο σημείο του Ñ.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Υπάρχει συνάρτηση παντού συνεχής στο Ñ και πουθενά παραγωγίσιμη . Μια τέτοια είναι το ιστορικό αντιπαράδειγμα του Weierstrass.

Έστω φ η συνάρτηση αυτή του Weierstrass ή οποιαδήποτε άλλη με την ίδια ιδιότητα. (παντού συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη)

Θεωρώ μια νέα συνάρτηση f :Ñ → Ñ με $f(x) = x \cdot \varphi(x)$. Η f είναι συνεχής, ως γινόμενο συνεχών.

Έχω:

$$f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\varphi(x) = \varphi(0)$$

(λόγω ασυνεχείας της φ στο 0).

Θα δείξω ότι η f παραγωγίζεται **μόνο στο 0**.

Έστω $x_0 \in$ Ñ $-\{0\}$. Τότε:

$$f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)\varphi(x_0+h)-x_0\varphi(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left[x_0\cdot\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}+\varphi(x_0+h)\right] = x_0\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x)}{h}+\varphi(x\ ).$$

Όμως, το $\lim\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}$ δεν υπάρχει.

Επομένως και το $f'(x_0)$ δεν υπάρχει.

5. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο της, δεν έπεται κατ' ανάγκην ότι είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Υπάρχει συνάρτηση $f : Ñ \to Ñ$ με $f(x) = |x|$, η οποία είναι συνεχής στο Ñ, άρα και στο $x_0 = 0$, αλλά όπως θα δείξουμε, δεν είναι παραγωγίσιμη $x_0 = 0$.

Πράγματι $f(x) = |x| = \left\{\begin{matrix} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{matrix}\right\}$ και

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} = 1 = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} = (-1) = -1.$$

Δηλαδή, $f'_\delta = 1 \neq -1 = f'_\delta(0)$, δηλαδή δεν υπάρχει η παράγωγος στο 0.

6. Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι ένας ισοδύναμος ορισμός της παραγώγου σε σημείο *x₀* του πεδίου ορισμού της *f*, είναι $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$.

Μπορείτε να τον διαψεύσετε;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = |x|$, η οποία όπως έχουμε δείξει (προηγούμενη εφαρμογή) δεν έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$.

Σύμφωνα όμως με τον τεθέντα ορισμό:

$$f'_\delta(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h - [-(-h)]}{2h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0}{2h} = 0.$$

$$f'_\alpha(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h - (-\eta)}{2h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{0}{2h} = 0.$$

Δηλαδή, ο «νέος ορισμός» δείχνει ύπαρξη παραγώγου στο 0, πράγμα εσφαλμένο.

<u>ΣΧΟΛΙΟ:</u> Στην πραγματικότητα, ο «νέος» αυτός ορισμός, ορίζει την **συμμετρική παράγωγο στη θέση *x₀***. Όταν υπάρχει η (κανονική) παράγωγος στην θέση x_0, συμπίπτει με την συμμετρική παράγωγο, ενώ όταν υπάρχει η συμμετρική παράγωγος (όπως στο παράδειγμά μας) δεν συμπίπτει υποχρεωτικά με την παράγωγο.

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι για την συμμετρική παράγωγο, εφόσον υπάρχουν και οι

$f'_\alpha(x_0), f'_\delta(x_0)$, ισχύει ότι $f'_\sigma(x_0) = \dfrac{1}{2}\left[f'_\alpha(x_0) + f'_\delta(x_0)\right]$. (1)

Αυτό σημαίνει, ότι όταν $\exists f'(x_0)$, τότε $f'_\alpha(x_0) = f'_\delta(x_0) = f'(x_0)$ και από (1) έχω $f'_\sigma(x_0) = f'(x_0)$.

Αν όμως $f_\alpha'(x_0) \neq f_\delta'(x_0)$, τότε δεν ορίζεται η παράγωγος του x_0, αλλά ορίζεται η $f_\sigma'(x_0)$, η οποία ουσιαστικά είναι η μέση τιμή αριστερής και δεξιάς παραγώγου (εφόσον υπάρχουν).

7. Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να υπάρχει συμμετρική παράγωγος σε σημείο x_0 μιας συνάρτησης f, χωρίς να υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι στο x_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : Ñ \to Ñ$ με

$$f(x) = \begin{cases} x\ ημx, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f_\sigma'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{hημ\frac{1}{h}-\left[-hημ\left(\frac{1}{h}\right)\right]}{2h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{0}{2h} = 0$$

Δηλαδή $\exists f_\sigma{}'(0) = 0$.

Αν υπάρχει η $f'(0)$, θα πρέπει να υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hημ\frac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} ημ\frac{1}{h}.$$

Για το τελευταίο όμως όριο, γνωρίζουμε (βλέπε Β.4.1.3α) ότι δεν υπάρχει, αφού ούτε τα αμφιπλεύρως όρια στο 0 υπάρχουν, δηλαδή δεν υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι.

8. Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f+g στο σημείο x_0, χωρίς να υπάρχει αναγκαστικά η παράγωγος των f και g στο x_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, και $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Τότε $(f+g)(x) = 0\ \ \forall x \in Ñ$ και η f+g ως σταθερή είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $(f+g)'(0) = 0$.

Όμως, $f'(0)\ \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hημ\frac{1}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} ημ\frac{1}{h^2} = +\infty$.

Δηλαδή η παράσταση $f'(0) \notin Ñ$, δεν παραγωγίζεται η f στο 0.

Ομοίως δείχνεται ότι και για την g δεν υπάρχει παράγωγος στο 0.

Να σημειωθεί, ότι η μη ύπαρξη των παραγώγων των *f*, *g* στη θέση 0, εξασφαλίζεται και από την αναγκαία (αλλά μη ικανή συνθήκη) της συνέχειας των *f* και *g* , στο 0 που δεν εκπληρούται.

9. Να αποδειχθεί η προηγούμενη πρόταση και για το γινόμενο *f·g* δύο συναρτήσεων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f(x)=|x|$ και $g(x)=-|x|$.

Στο σημείο $x_0=0$ δεν υπάρχει παράγωγος ούτε για την f, ούτε για την *g*, αλλά

$(f\cdot g)(x)=|x|\cdot(-|x|)=-|x|^2-x^2,\;\; 0\;\; \forall x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη $\forall x\in\mathbb{R}$ και $(f\cdot g)'(0)=0$.

<u>**Σχόλιο:**</u> Με τις ίδιες συναρτήσεις *f*, *g* μπορώ να αποδείξω και την προηγούμενη πρόταση.

10. Αν η *f·g* παραγωγίσιμη στο *α* και η *f* παραγωγίσιμη στο *α*, τότε θα είναι και *g* παραγωγίσιμη στο *α*; Να διατυπωθούν όσοι –τυχόν-πρόσθετοι περιορισμοί χρειάζονται γι' αυτό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχω:

$$\frac{(f\cdot g)(\alpha+h)-(f\cdot g)(\alpha)}{h}=\frac{f(\alpha+h)\cdot g(\alpha+h)-f(\alpha)\cdot g(a)}{h}=$$

$$\frac{f(\alpha+h)[g(\alpha+h)-g(a)]+g(\alpha+h)\cdot[f(\alpha+h)-f(a)]}{h}=$$

$$f(\alpha+h)\cdot\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}+g(\alpha)\cdot\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}. \qquad (1)$$

Επιλύοντας την (1) ως προς $\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}$ λαμβάνω

$$\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=\frac{\frac{(fg)(\alpha+h)-(fg)(a)}{h}-\frac{f(\alpha+h)-f(a)}{h}...g(\alpha)}{f(\alpha+h)}. \qquad (2)$$

Για να υπάρχει το όριο του α' μέλους καθώς $h\to 0$, θα πρέπει να υπάρχει και του β' μέλους, από όπου με βάση την ύπαρξη $(f\cdot g)'(a)$, $f'(a)$, φαίνεται ότι απαιτείται μόνο $\lim_{h\to 0} f(\alpha+h)=f(a)\neq 0$, για να έχει νόημα αριθμού.

Πράγματι, αν $f(x)=0\;\;\forall x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\sqrt[3]{x}$, τότε $(f\cdot g)(x)=0$ και $f'(0)$, $(f\cdot g)'(0)=0$, ενώ $g'(0)$απειρίζεται.

11. Ισχύει η πρόταση: «Αν f παραγωγίσιμη στο α και $f(a) \neq 0$ τότε η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο α».
Να αποδείξετε ότι η υπόθεση $f(a) \neq 0$ δεν μπορεί να παραληφθεί.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $f(x) = x$, τότε η f παραγωγίζεται στο 0 και $f'(0) = 1$. Όμως η $|f|(x)$ δεν παραγωγίζεται στο 0, αφού $f_a'(0) = -1 \neq 1 = f_\delta'(0)$.

12. Ισχύει η πρόταση: «Αν f, g παραγωγίσιμες στο α και $f(a) \neq g(a)$, τότε οι συναρτήσεις $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ είναι παραγωγίσιμες στο α».
Να αποδείξετε ότι η υπόθεση $f(a) \neq g(a)$ είναι απολύτως απαραίτητη για να ισχύει το συμπέρασμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $f(x) = x$, $g(x) = x$ τότε $\max(f, g) = |x|$, η οποία στο α=0 δεν παραγωγίζεται, αφού $f(0) = g(0) = 0$.
Όμως και για την $\min(f, g) = -|x|$.

13. Ισχύει η πρόταση: «Έστω D διάστημα, $D \subseteq$ Ñ, $f : D \to$ Ñ γνησίως μονότονη και συνεχής συνάρτηση στο D. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in D$,, $f'(x_0) \neq 0$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(D) \to$ Ñ είναι παραγωγίσιμη στο $y_0 = f(x_0)$
και ισχύει $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$».
Να εξηγηθεί με κατάλληλο αντιπαράδειγμα, γιατί η υπόθεση $f'(x_0) \neq 0$ είναι απαραίτητη και ουσιώδης, ώστε να υπάρχει η $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.
Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f(0) = 0$.
Ορίζεται η f^{-1}: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι και αυτή γνησίως αύξουσα και $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.

Όμως $\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f^{-1}(0+h)-f^{-1}(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{h^{1/3}}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}h^{-2/3}=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{1}{h^{2/3}}+\infty\cdot$

Και

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f^{-1}(0+h)-f^{-1}(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h^{1/3}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt[3]{-h}}{h}\ \lim_{h\to 0-}-\frac{\sqrt[3]{-h}}{(\sqrt[3]{-h})^3}=\lim_{h\to 0-}-\frac{1}{(\sqrt[3]{-h})^2}-\infty$$

Δηλαδή, $\nexists\left(f^{-1}\right)'(0)$.

14. Αν στο γράφημα μίας συνάρτησης υπάρχει εφαπτόμενη σε κάθε σημείο του, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη παντού;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι πάντα. Ενδέχεται να υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία σε κάποιο σημείο του γραφήματος μιας συνάρτησης, αλλά στο σημείο εκείνο να μην υπάρχει η παράγωγος, διότι δεν είναι πραγματικός αριθμός και είναι +∞ ή -∞ η οριακή τιμή του λόγου μεταβολής της συνάρτησης σε αυτό το σημείο.

Αν $f:[0,+\infty]\to$ Ñ με $f(x)=\sqrt[3]{x}$, τότε

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h}-\sqrt[3]{0}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}}=+\infty$ και η ευθεία *x=0* (η κλίση +∞ που βρήκαμε εφάπτεται του διαγράμματος της $f(x)=\sqrt[3]{x}$ στο σημείο (0,0) εις το οποίο δεν θεωρείται παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη), αλλά ως έχουσα **«κατ' εκδοχήν» παράγωγο** το +∞.

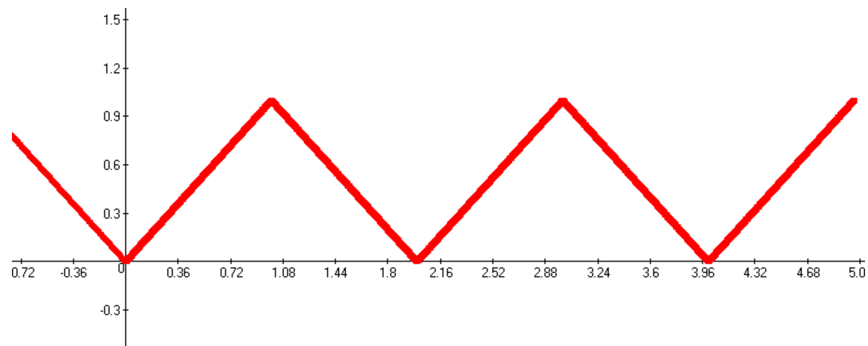
15. Να βρεθεί συνάρτηση ορισμένη στο Ñ, η οποία να είναι παντού συνεχής και η οποία να έχει άπειρα (αριθμήσιμα) σημεία στα οποία να μην παραγωγίζεται.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μια τέτοια συνάρτηση ήδη έχουμε ορίσει στο Α.7.2 ,την φ(χ)=$\left|-\dfrac{1}{2}+\left\{\chi-\dfrac{1}{2}\right\}\right|$ Μια ίδιας μορφής και σχήματος συνάρτηση , χωρίς προσφυγή σε απόλυτο και συνάρτηση δεκαδικού μέρους, μπορεί περισσότερο συμβατικά να ορισθεί ως εξής: $f:$ Ñ $\to$ Ñ με

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}-x+2n, & x\in[2n-1,2n]\\ x-2n, & x\in(2n,2n+1]\end{array}\right\} n\in \text{Ù}\,.$$

Η f για $n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2...$ είναι ασυνεχής, ενώ για $x = 0, \pm 1, \pm 2,...$ δεν είναι παραγωγίσιμη, όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα («πριονωτή συνάρτηση»).

ΣΧΟΛΙΟ: Η ιδέα κατασκευής ενός τέτοιου παραδείγματος βασίζεται στην κατασκευή μιας κατάλληλης

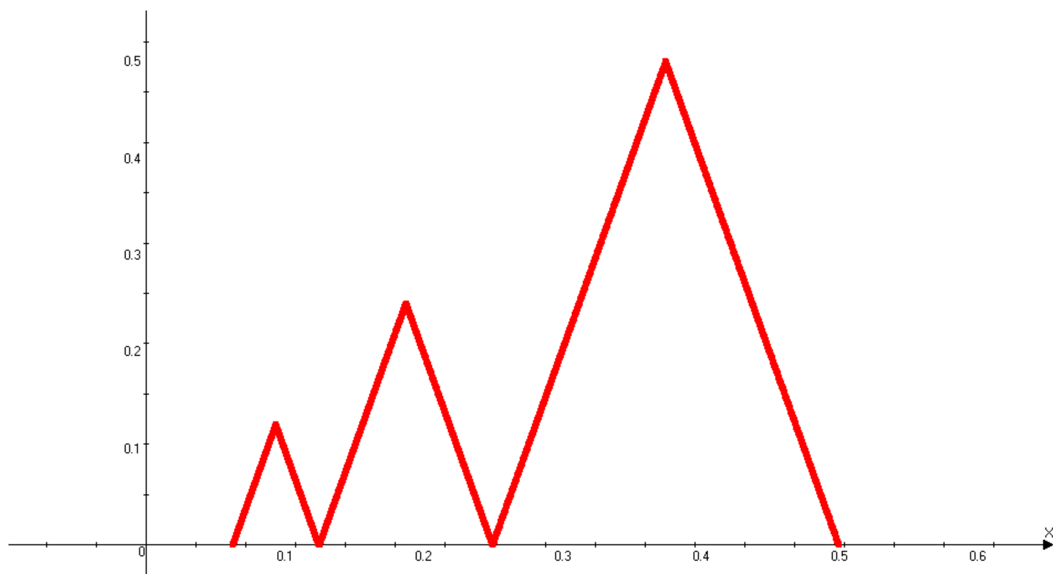


συνάρτησης σε ένα διάστημα [α,β] την οποία επεκτείνουμε ως περιοδική στο R.

16. Να βρεθεί συνάρτηση ορισμένη στο $[0,1]$, η οποία να είναι παντού συνεχής και η οποία να έχει άπειρα (αριθμήσιμα) σημεία στα οποία να μην παραγωγίζεται.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ήδη στο Α. 4.2 έχομε κατασκευάσει δύο τέτοια παραδείγματα. Θα κατασκευάσουμε και ένα τρίτο Μια τέτοια συνάρτηση είναι και η

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 4x - \dfrac{1}{2^{n-1}}, & x \in \left[\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{3}{2^{n+2}}\right] \\ -4x - \dfrac{1}{2^{n-2}}, & x \in \left[\dfrac{3}{2^{n+2}}, \dfrac{1}{2^{n}}\right] \\ 0, & x = 0 \end{array} \right\} n \in \mathbb{N}.$$



Να σημειωθεί, ότι πρώτα έγινε η κατασκευή γραφικά της συνάρτησης και κατόπιν βρέθηκε η αναλυτική της έκφραση. Η λεκτική γεωμετρική περιγραφική κατασκευή της συνάρτησης αποτελεί αποδεκτό τρόπο έκφρασης ενός αντιπαραδείγματος γενικά, ίσως όχι εντελώς πλήρους, αλλά αποδεκτό.

Η f είναι συνεχής σε κάθε κλάδο, αφού κάθε κλάδος της είναι πολυώνυμο α' βαθμού. Επίσης, για $x = \frac{3}{2^{n+2}}$ έχω ίσες τιμές στους δύο κλάδους από όπου συνάγεται και η συνέχεια σε κάθε σημείο της (ουσιαστικά ακολουθίας) $x_n = \frac{3}{2^{n+2}}$.

Εξετάζω τώρα την παραγωγισιμότητα της f σε σημείο της μορφής $\frac{3}{2^{n+2}}, n \in$ Í .

$$f'_\alpha\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right) = 4 \neq -4 = f'_\delta\left(\frac{3}{2^{\nu+2}}\right).$$

Δηλαδή, στα σημεία $\frac{3}{2^{n+2}}$ η f δεν παραγωγίζεται και (προφανώς) είναι άπειρα στο πλήθος και αριθμήσιμα.

17. Να βρεθεί συνάρτηση, η οποία να είναι ορισμένη σε ένα οσοδήποτε μικρό διάστημα, παντού συνεχής και να έχει άπειρα σημεία (αριθμήσιμα) στα οποία να μην παραγωγίζεται.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στην προηγούμενη συνάρτηση, αν θεωρήσω περιορισμό της, για n αρκούντως μεγάλο, μπορώ να επιτύχω διάστημα ορισμού, $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$ οσοδήποτε μικρό.

Πάλι θα έχω άπειρα σημεία στα οποία δεν θα παραγωγίζεται $\frac{3}{2^{n+2}}$ $n > n_0$, όπου *n₀* το αρκούντως μεγάλο n_0 που επιτυγχάνει το οσοδήποτε μικρού πλάτους διάστημα ορισμού $\left[0, \frac{1}{2^n}\right]$.

18. Υπάρχει συνάρτηση, που είναι ασυνεχής, αλλά είναι παντού παραγωγίσιμη έστω και με «κατ' εκδοχήν» παράγωγο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ασυνεχής και παντού παραγωγίσιμη δεν υπάρχει, διότι αν υπήρχε, ως παραγωγίσιμη θα ήταν και παντού συνεχής.

Στρέφουμε έτσι την προσοχή μας στην ύπαρξη ασυνεχούς συναρτήσεως σε σημείο x_0, στο οποίο όμως υπάρχει κατ' εκδοχήν παράγωγος.

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η συνάρτηση «πρόσημο»:

$$f : \text{Ñ} \to \text{Ñ} \text{ με } f(x) = \begin{Bmatrix} 1, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ x, & \text{αν } x < 0 \end{Bmatrix}$$

Η f είναι συνεχής παντού, εκτός από το $x_0=0$ όπου παρουσιάζει ασυνέχεια, αφού $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0) = 0$.

Όμως

$$f'_\alpha = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-1-0}{h} = +\infty$$

$$f'_\delta = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1-0}{h} = +\infty .$$

Δηλαδή, $f'(0) = +\infty$ («κατ' εκδοχήν» παραγωγίσιμη) και προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη και $\forall x \in \text{Ñ} - \{0\}$.

19. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτηση $f : \text{Ñ} \to \text{Ñ}$ που είναι παραγωγίσιμη (και άρα συνεχής), αλλά είναι παντού παραγωγίσιμη έστω και με «κατ' εκδοχήν» παράγωγο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f : \text{Ñ} \to \text{Ñ}$ με $f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{Bmatrix}$.

Αν $x \neq 0$, τότε

$$f^{'}(x) = 2x \cdot \eta\mu\frac{1}{x} + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow f^{'}(x) = 2x \cdot \eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}.$$

Αν $x = 0$, τότε

$$f^{'}(0) = \lim_{x\to\cup 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \cdot \eta\mu\frac{1}{x} = 0.$$

(Ως γινόμενο απειροστής επί φραγμένη).

Άρα, $f^{'}(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Εξετάζουμε την συνέχεια της $f^{'}(x)$ στο 0. Είναι $f^{'}(0) = 0$. Συνεπώς, αν είναι συνεχής στο 0, θα πρέπει για κάθε μηδενική ακολουθία $x_n \to 0$ $(x_n \neq 0)$, η ακολουθία $f^{'}(x_n) \to 0$.

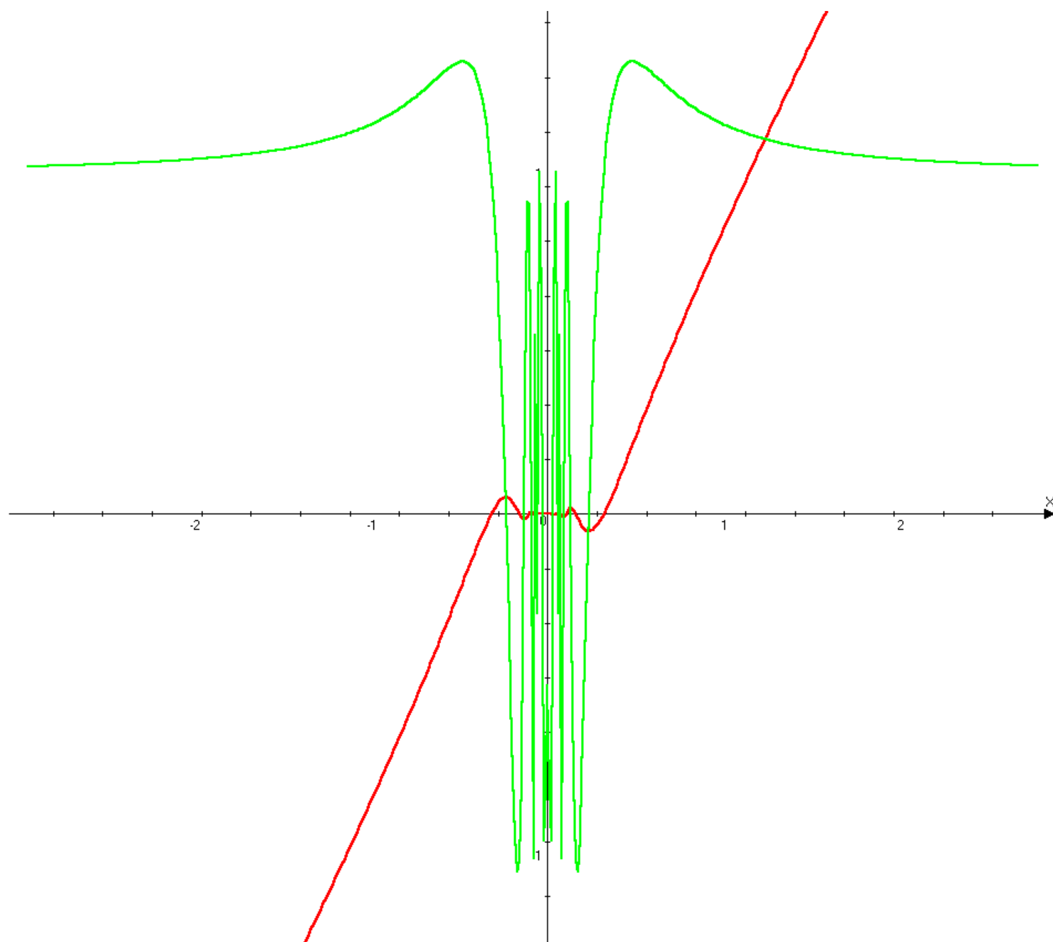
Αν θέσω $x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0$ και $x_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε $2x_n\eta\mu\frac{1}{x_n} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x_n} = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \cdot \eta\mu 2\pi n - \sigma\upsilon\nu 2\pi n = \frac{1}{\pi n} \cdot 0 - 1 = -1 \to -1$.

Άρα, η $f^{'}$ δεν είναι συνεχής στο 0. Επί πλέον, αν θέσω $x_n^{'} = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ και $x_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $2x_n^{'}\eta\mu\frac{1}{x_n} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x_n} = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \cdot \eta\mu\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \frac{2}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \cdot 1 - 0 = \frac{2}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0 \neq -1$.

Άρα, εκτός του ότι η $f^{'}$ δεν είναι συνεχής στο 0, δεν υπάρχει καν το $\lim_{x\to 0} f^{'}(x)$.



Η κόκκινη είναι η f και η πράσινη η f'

> **20. Να αποδειχθεί ότι είναι δυνατόν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) \in$ Ñ και $\nexists\, f'(x_0)$.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f :$ Ñ$^+ \to$ Ñ με $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,2) \\ x-2, & x \in [2,+\infty) \end{cases}$ και $x_0 = 2$.

Όταν $x \neq 2$, τότε η $f'(x) = 1$.

Προφανώς, $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = 1$, ενώ στο 2 έχω ασυνέχεια και προφανώς

$$\nexists\, f'(2)$$

Επίσης,

$$f'_{\alpha}(2) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 2^-} \frac{2+h-(2-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2+h}{h} = \lim_{h\to 0^-}\left(\frac{2}{h}+1\right) = -\infty + 1 = -\infty$$

$$f'_{\delta}(2) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)-2-(2-2)}{h} = \lim_{h\to 0^{+-}} \frac{h}{h} = 1 .$$

Επομένως, αφού $f'_{\delta}(2) \neq f'_{\alpha}$ έπεται ότι $\nexists\, f'(2)$.

ΣΧΟΛΙΟ: Το συγκεκριμένο παράδειγμα μας δίνει ένα και μοναδικό x_0 στο οποίο να εκπληρούνται οι συνθήκες της εκφώνησης. Αν θεωρήσω την $g : Ñ \to Ñ$ με $g(x) = x - [x]$, τότε αν $\kappa \in Ù$, $g(\kappa) = 0$, $\lim_{x\to\kappa^+} g'(x) = \lim_{x\to\kappa^-} g'(x) = 1$, ενώ $g'_\delta(\kappa) = 1$ και $g'_\alpha(\kappa) = -\infty$. Έχω δηλαδή, απειρία σημείων που εκπληρούν τις συνθήκες τις εκφωνήσεως.

21. Να αποδειχθεί ότι είναι δυνατόν να υπάρχει η $f'(x_0)$ και να μην υπάρχει $\lim_{x\to x_0} f'(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν έχω $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

Τότε η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη παντού. Επίσης:

$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (βλ.εφ. 19 παρόντος κεφαλαίου)

Έχουμε δείξει ότι $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$, ενώ $f'(0) = 0$.

22. Να δοθούν τρία παραδείγματα συναρτήσεων *f*, *g*, *h*, για τις οποίες να υπάρχουν οι f', g', h' στο πεδίο ορισμού της εκτός από ένα σημείο x_0 (όχι το ίδιο για τις *f*, *g*, *h*) για το οποίο:

(i) Η τιμή $f'(x_0)$ δεν ορίζεται, αλλά υπάρχει συνεχής επέκταση της $f'(x)$ στο x_0 και άρα τελικώς η $f'(x_0)$ να ορίζεται.

(ii) Η τιμή $g'(x_0)$ δεν ορίζεται, αλλά υπάρχει μία κατ' εκδοχήν παράγωγος στο $g(x_0)$.

(iii) Η τιμή $h'(x_0)$ δεν ορίζεται, αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} h'(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) $f(x)=\sqrt{x\cdot \eta\mu x}\,/[0,\pi]$

Αν $x\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x\sigma\upsilon\nu x}}=\dfrac{\sqrt{\eta\mu x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\eta\mu x}}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2}$.

Το $f'(0)$ δεν έχει νόημα από την μορφή της $f'(x)$, αλλά

$$\cdot\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\eta\mu x}{x}}+\sqrt{\frac{x}{\eta\mu x}}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta\mu x}{x}}+\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x}{\eta\mu x}}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}+\sqrt{1}\cdot\frac{1}{2}=1$$

Συνεπώς (σύμφωνα και με σχετική πρόταση) η $f'_\delta(0)$ υπάρχει και ισούται με 1.

(ii) $g(x)=\sqrt{x}\,/[0,+\infty]$

Αν $x\neq 0$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ και $g'(0)$ δεν έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Όμως, $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)=+\infty$, δηλαδή υπάρχει η κατ' εκδοχήν παράγωγος στο

(iii) $h(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Όπως δείξαμε στην εφαρμογή 19 του παρόντος κεφαλαίου , η h είναι παραγωγίσιμη στο Ñ, όμως στο 0 δεν ορίζεται το $h'(0)$, ενώ το $\lim\limits_{x\to 0} h'(x)$ δεν υπάρχει.

23. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης, για την οποία να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in$ Ñ, ενώ να μην υπάρχει $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f(x)=\dfrac{\eta\mu x^2}{x}$.

Για την f, έχω: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu x^2=0$, ως γινόμενο απειροστής («μηδενικής») επί φραγμένη συνάρτηση.

$$f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x^2\cdot 2x\cdot x-1\cdot\eta\mu^2 x}{x^2}=2\sigma\upsilon\nu x^2-\frac{\eta\mu x^2}{x^2}.$$

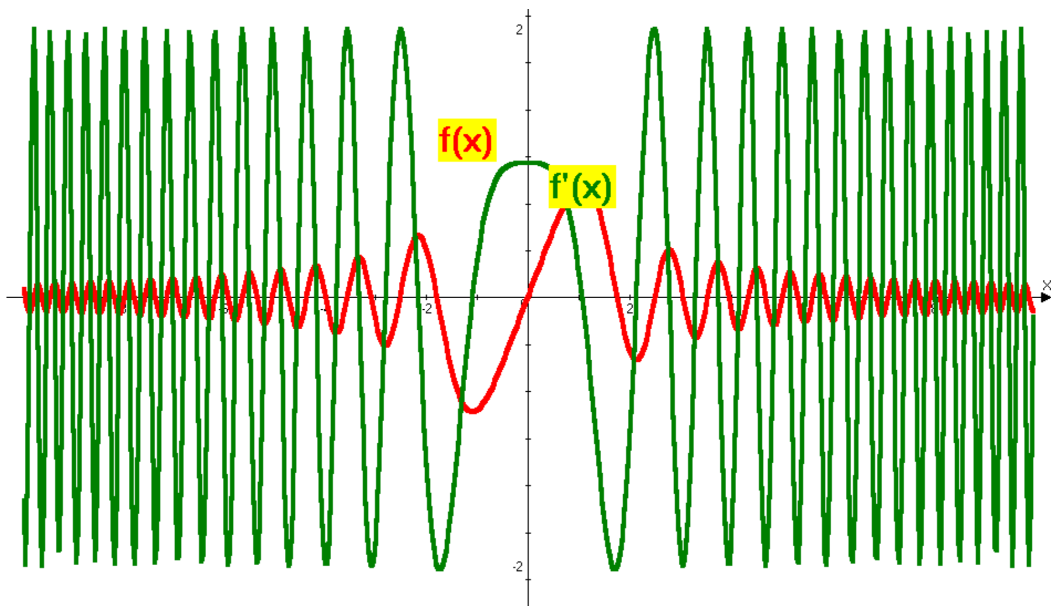
Θεωρώ $x_n = \sqrt{2\pi n} \to +\infty$ και $x'_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to +\infty$.

Τότε:

$$f'(x_n) = 2\text{συν}x_n^2 - \frac{\text{ημ}x_n^2}{x_n^2} = 2\cdot 1 - 0 = 2 \to 2.$$

$$f'(x'_n) = 2\text{συν}x_n'^2 - \frac{\text{ημ}x_n'^2}{x_n'^2} = 2\cdot 0 - \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0.$$

Άρα $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.



24. Το γράφημα μια συνάρτησης είναι απολύτως «λείο», δεν έχει «ακίδες», οξείες, ορθές ή αμβλείες γωνίες, ευθύγραμμες ή καμπυλόγραμμες, ενώ σε κάθε σημείο του, υπάρχει εφαπτομένη ευθεία. Όμως η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη! Πως μπορεί αυτό να είναι δυνατόν;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η συνάρτηση $f : \tilde{N} \to \tilde{N}$ με $f(x) = x^3$, είναι παντού παραγωγίσιμη.

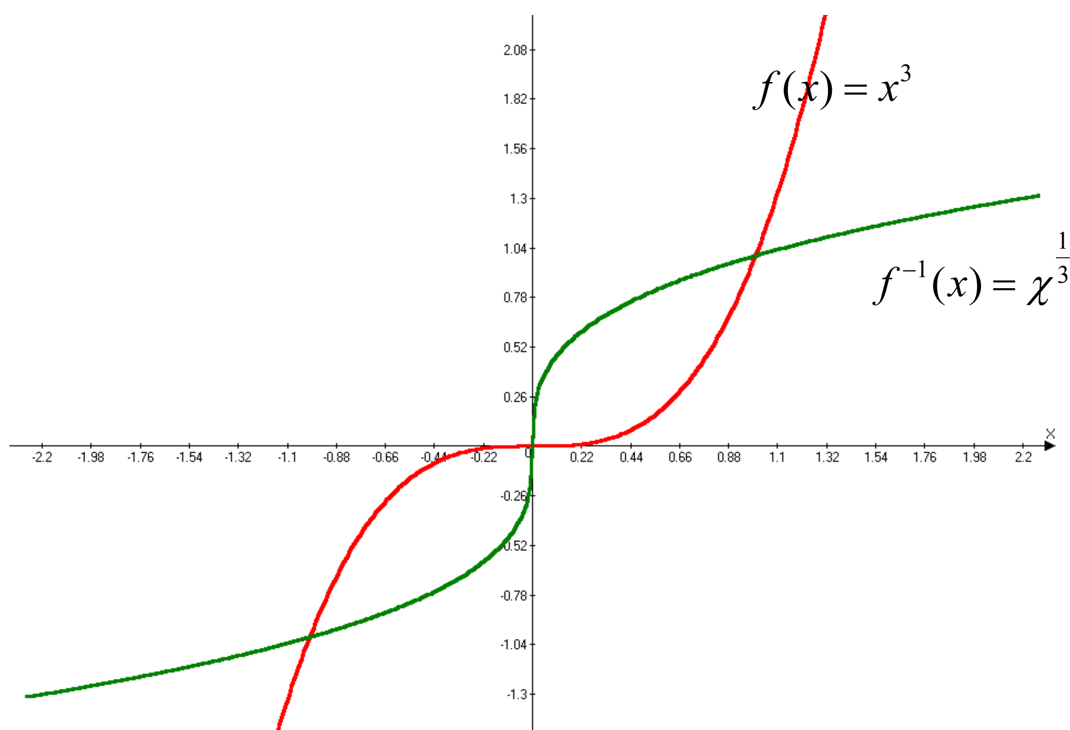
Το γράφημα της επομένως, είναι παντού «λείο» και υπάρχει παντού εφαπτομένη ευθεία.

Το συμμετρικό του γραφήματος ως προς την ευθεία $y = x$, ως γνωστόν είναι αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x) = \chi^{\frac{1}{3}}$ (θεωρούμε ότι το x παίρνει και αρνητικές τιμές, άλλως ορίζουμε $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & αν \ \ x \ge 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & αν \ \ x < 0 \end{cases}$.

Το γράφημα της f^{-1}, λόγω συμμετρίας, έχει τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες με το γράφημα της f.

Όμως, $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[2]{h^2}}=+\infty$.

Δηλαδή, η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$. (Είναι μόνο «κατ' εκδοχήν» παραγωγίσιμη).



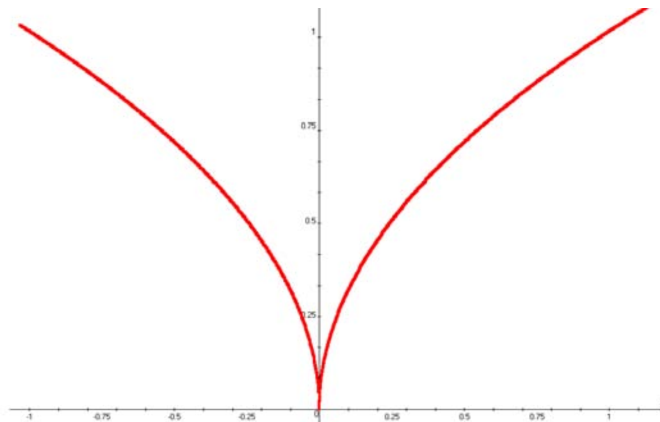
25. Ένας φοιτητής, επικαλούμενος το προηγούμενο παράδειγμα, έχει τη γνώμη, ότι η έννοια της παραγώγου είναι «ανεπαρκώς ορισμένη». Ισχυρίζεται ότι θα πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος, ώστε για κάθε συνάρτηση (όπως και για την $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$) να υπάρχει η έννοια της παραγώγου σε κάθε σημείο της, εάν και μόνο εάν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία σε αυτό το σημείο της. Ισχυρίζεται, ότι με αυτό τον τρόπο καλύπτουμε την παραγωγισιμότητα της $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ σε κάθε σημείο της, πράγμα που έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με την γεωμετρική εποπτεία και την αίσθηση του «λείου» γραφήματος

Υπάρχει αντιπαράδειγμα που να κλονίζει την πίστη και τους ισχυρισμούς του φοιτητή;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αντιπαράδειγμα μπορεί να είναι η $f: Ñ \to Ñ$ με $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Στο σημείο 0 υπάρχει μοναδική εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης ο άξονας *yy’* καθώς $f_{\alpha}'(0) = -\infty, f'(\delta) = +\infty$.

Εδώ και υπάρχει μοναδική ευθεία εφαπτομένη (με την εκ δεξιών και εξ αριστερών έννοια), αλλά δεν έχω κατ’ ουδένα τρόπο «λεία συνάρτηση», αφού στο 0 έχω μια ένωση **δύο οιονεί «κερατοειδών γωνιών»**. Παράγωγο στο 0 δεν έχουμε, πράγμα που συμφωνεί με την εποπτεία και αντιβαίνει στην ιδέα της μοναδικής εφαπτομένης ευθείας.



Αξίζει να σημειωθεί, ότι στο 0 δεν υπάρχει ούτε «κατ’ εκδοχήν» παράγωγος, αφού οι εκ δεξιών και εξ αριστερών οριακές τιμές της παραγώγου είναι $+\infty$ και $-\infty$ αντιστοίχως.

26. «Αν $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in A \subseteq Ñ$, τότε $f(x) = C \ \ \forall x \in A$ ».

Να αποδειχθεί η ανωτέρω πρόταση εάν είναι αληθής, ή εν εναντία περιπτώσει να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Δεν είναι αληθής. Ως αντιπαράδειγμα θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ 2, & x \in \left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \end{cases} \alpha \neq \beta$, η οποία δεν είναι σταθερή.

Όμως, $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in A = \left[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και η f / A δεν είναι σταθερή.

Η πρόταση ισχύει όταν το *A* είναι διάστημα και η *f* συνεχής, οπότε μπορεί να εφαρμοσθεί το Θ.Μ.Τ. για την απόδειξη.

27. Υπάρχει συνάρτηση, της οποίας η παράγωγος, μηδενίζεται σε άπειρα σημεία του διαστήματος (0,1).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Θεωρώ το διάστημα $\left(\dfrac{1}{\kappa+1},\dfrac{1}{\kappa}\right)$, $\kappa\in$ Í .

$$f\left(\frac{1}{\kappa+1}\right)=\frac{1}{\kappa+1}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{\frac{1}{\kappa+1}}=\frac{1}{\kappa+1}\eta\mu(\kappa+1)\pi=\frac{1}{\kappa+1}\cdot 0=0.$$

$$f\left(\frac{1}{\kappa}\right)=\frac{1}{\kappa}\cdot\eta\mu\frac{\pi}{\frac{2}{\kappa}}=\frac{1}{\kappa}\eta\mu\kappa\pi=\frac{1}{\kappa}\cdot 0=0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{\kappa+1},\dfrac{1}{\kappa}\right]$ και η παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{1}{\kappa+1},\dfrac{1}{\kappa}\right)$. Άρα εφαρμόζεται το Θ.Rolle. ‘Ετσι, υπάρχει $x_\kappa\in\left(\dfrac{1}{\kappa+1},\dfrac{1}{\kappa}\right): f'(x_\kappa)=0$.

Επειδή τα διαστήματα $\left(\dfrac{1}{\kappa+1},\dfrac{1}{\kappa}\right)$, $\kappa\in$ Í είναι άπειρα και ξένα μεταξύ τους, υπάρχουν άπειρες και αριθμήσιμες ρίζες της $f'(x)=0$ στο (0,1).

9. ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE & ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

9.1.ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

1. Το θεώρημα Rolle έχει ως εξής: «Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε $\exists$ ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f'(\xi)=0$».

Να αποδείξετε με χρήση κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων , ότι οι υποθέσεις του Θ . Rolle είναι απαραίτητες για να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Συγκεκριμένα:

(i) Η υπόθεση της συνέχειας είναι απαραίτητη.

(ii) Η υπόθεση της συνέχειας σε κλειστό διάστημα είναι απαραίτητη.

(iii) Η συνέχεια πρέπει να είναι σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και όχι σε διάστημα (α,β) ή $[\alpha,\beta)$.

(iv) Η παραγωγισιμότητα στο (α,β)είναι απαραίτητη.

(v) Η συνθήκη $f(\alpha)=f(\beta)$είναι απαραίτητη.

(vi) Οι συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές για να ισχύει το συμπέρασμα , αλλά όχι και αναγκαίες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

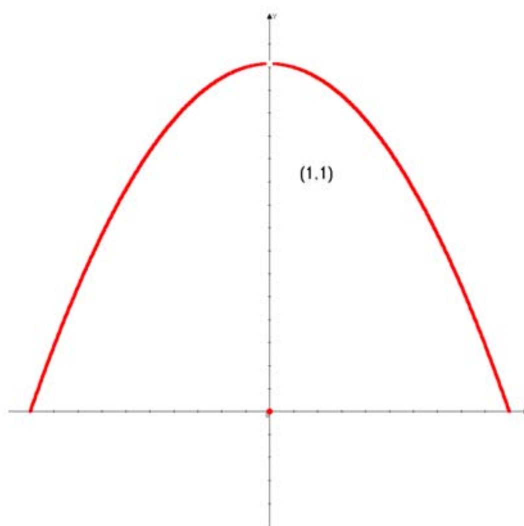
(i) Το συμπέρασμα του Θ. Rolle δεν ισχύει αν $\exists x_0\in[\alpha,\beta]$, ώστε η f να είναι ασυνεχής στο χ_0. Για παράδειγμα για την συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{αν } x\in[-1,1]-\{0\}\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

ισχύουν:

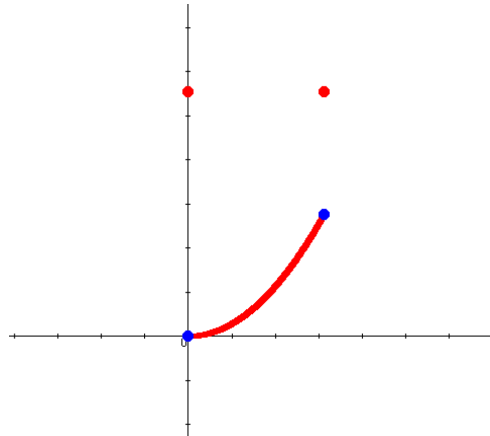
- Είναι ασυνεχής στο 0 και συνεχής στο $[-1,1]-\{0\}$.
- $f(-1)=f(1)=0$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]-\{0\}$.

Δηλαδή, πληρούνται όλες οι συνθήκες του Θ. Rolle, πλην της ασυνέχειας σε ένα και μοναδικό σημείο.



Έτσι όμως, $\nexists\, x_0 \in [-1,1] : f'(x_0) = 0$, διότι αν υποθέσουμε ότι υπήρχε τέτοιο x_0 , θα επαλήθευε την εξίσωση $f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$, άτοπο, διότι στο $x_0 = 0$ είναι ασυνεχής, άρα στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη.

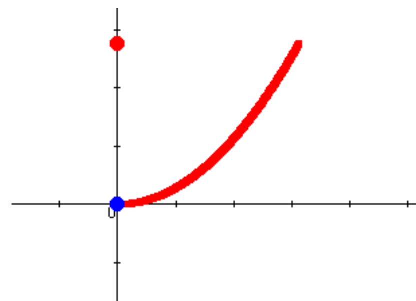
(ii) Η $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \in (0,1) \\ 2, & \text{αν } x \in \{0,1\} \end{cases}$



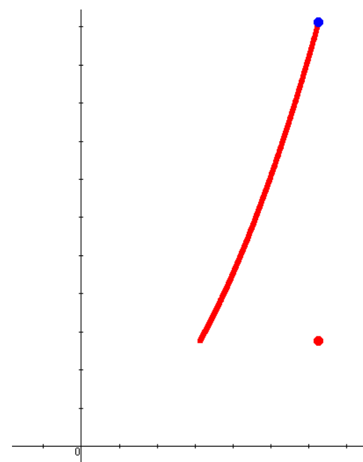
- Δεν είναι συνεχής στο κλειστό $[0,1]$.
- Είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό $(0,1)$.
- Ισχύει $f(0) = f(1) = 2$.

Αλλά, $\nexists\, x_0 \in (0,1) : f'(x_0) = 0$. Διότι αν υπήρχε τέτοιο x_0 , θα έπρεπε να είναι $x_0 = 0$, όμως στο 0 δεν είναι συνεχής, άρα όχι και παραγωγίσιμη.

(iii) Αν $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0,1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ τότε



- Η f ασυνεχής στο 0, άρα και μη παραγωγίσιμη.
- $f(0) = f(1) = 1$.
- Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$.



Αλλά, $\nexists\, x_0 \in (0,1)$ με $f'(x_0) = 0$, διότι μόνο το 0 θα μπορούσε να έχει αυτή την ιδιότητα και στο 0 δεν παραγωγίζεται.

αν υπήρχε τέτοιο x_0 , θα έπρεπε να είναι $x_0 = 0$, όμως στο 0 δεν είναι συνεχής, άρα όχι και παραγωγίσιμη.

Αν $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [1,2) \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ τότε

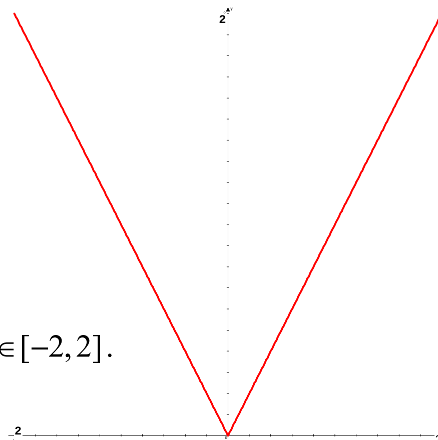
- Η f ασυνεχής στο 2, και συνεχής παντού

αλλού.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.
- $f(1)=f(2)=1$.

Όμως, $\nexists\ x_0 \in (0,1) : f'(x_0)=0$,διότι αν υπήρχε κάποιο, θα ήταν το 0 και $0 \notin (1,2)$.

(iv) Η παραγωγισιμότητα στο (α,β) είναι απαραίτητη.

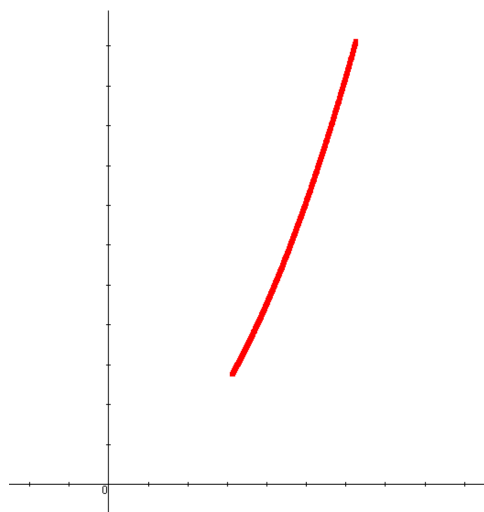


Αν $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$ τότε

- Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$.
- $f(2)=2f(-2)$.
- Η f δεν είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $0\in[-2,2]$.

Όμως, $\nexists\ x_0 \in (-2,2)\ :\ f'(x_0)=0$, (διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο, καταλήγουμε σε άτοπο).

(v) Η συνθήκη $f(\alpha)=f(\beta)$ είναι απαραίτητη.



Αν $f(x)=x^2\,/[1,2]$, τότε

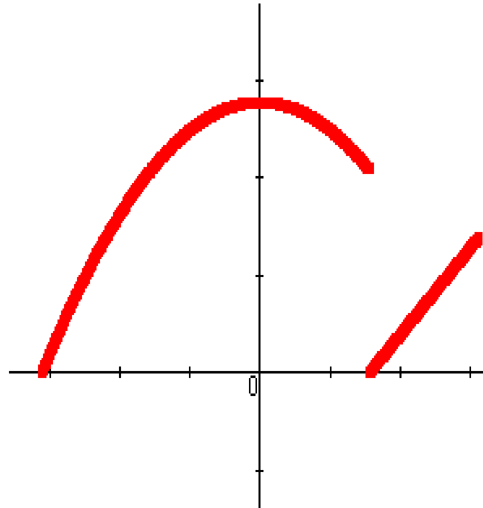
- Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$.
- $f(1)=1\neq 4=f(2)$.

Όμως, $\nexists\ x_0 \in (1,2) : f'(x_0)=0$, διότι θα έπρεπε $2x_0=0 \Rightarrow x_0=0\notin(1,2)$.

(vi) Οι συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες. Θα δώσουμε παράδειγμα όπου δεν εκπληρούται καμμία συνθήκη του Θ.Rolle, όμως $\exists\ x_0 \in (\alpha,\beta)\ :\ f'(x_0)=0$.

Θεωρώ την $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right) \\ x-\frac{1}{2}, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{cases}$

- Η f είναι ορισμένη στο $[-1,1]$.
- Η f δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$, αφού στο $x_0=\frac{1}{2}$ έχω ασυνέχεια.
- Η f, ως μη συνεχής στο $x_0=\frac{1}{2}$ δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.



Όμως, $\exists \; x_0=0 \in(-1,1) \; : \; f'(0)=0$.

9.2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Το Θ.Μ.Τ. είμαι μία γενίκευση του Θ.Rolle και διατυπώνεται ως εξής:
«Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta): f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$».

Να δείξετε με χρήση αντιπαραδειγμάτων τα παρακάτω:

(i) Η συνέχεια είναι απαραίτητη.

(ii) Η παραγωγισιμότητα στο ανοικτό διάστημα είναι απαραίτητη.

(iii)Οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες για το συμπέρασμα.

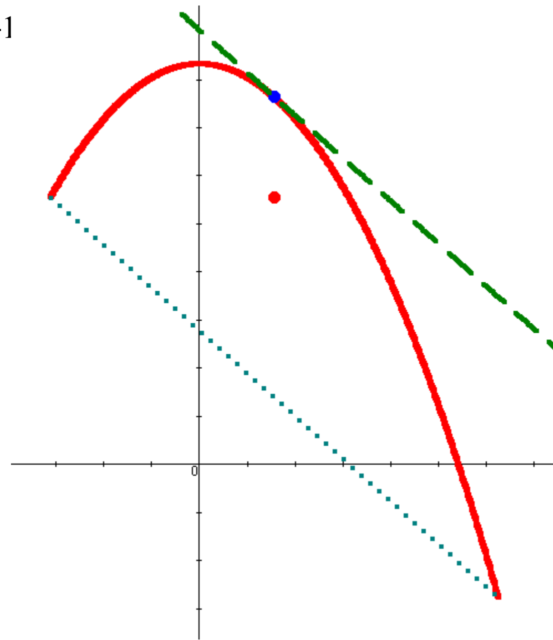
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μπορούμε να παραθέσουμε τα προηγούμενα παραδείγματα του Θ.Rolle, για το (i), (ii), (iii) αλλά και θα υποθέσουμε γενικά ότι $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

(i) Η συνέχεια είναι απαραίτητη

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3, & x\in[-1,2]-\left\{\frac{1}{2}\right\} \\ 2, & x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Η f δεν είναι συνεχής στο $[-1,2]$, διότι στο $x_0=\frac{1}{2}$ δεν είναι συνεχής.

- $\nexists\ \xi \in [-1,2]$ με $f^{\prime}(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-(-1)}=\dfrac{-1-2}{3}=-1$. Διότι $f^{\prime}(\xi)=-1 \Rightarrow$

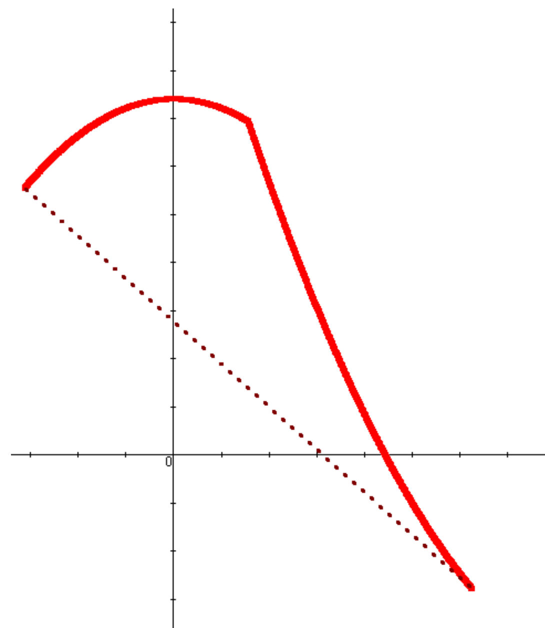


$-2\xi_0=-1, \xi_0=\dfrac{1}{2}$ άτοπο, αφού $\xi \neq \dfrac{1}{2}$, (γι αυτό στην κατασκευή του παραδείγματα θέσαμε ασυνέχεια στο $\xi=\dfrac{1}{2}$.

(ii) Η παραγωγισιμότητα στο ανοικτό διάστημα είναι απαραίτητη. Α.χ.

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{8}{3}, & x \in \left[-1,\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{2}{3}(x-3)^2-\dfrac{5}{3}, & x=\left[\dfrac{1}{2},2\right] \end{cases}$$

$$f^{\prime}(x)=\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x, & x \in \left(-1,\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{4}{3}(x-3), & x=\left(\dfrac{1}{2},2\right) \end{cases}$$



δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, άρα και στο $(-1,2)$.

Για την f, δεν ισχύει το Θ.Μ.Τ.

Πράγματι,

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{-1-2}{2+1}=-1.$$

Η εξίσωση $f'(\xi)=-1$, αν απαιτήσουμε $\xi\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$, δίνει $-\frac{4}{3}\xi=-1\Rightarrow\xi=\frac{3}{4}$ απορρίπτεται διότι $\xi\notin\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.

Αν απαιτήσουμε $\xi\in(-1,2)$, τότε $f'(\xi)=-1\Rightarrow\frac{4}{3}(\xi-3)=-1\Rightarrow4(\xi-3)=-3\Rightarrow$ $4\xi-12=-3\Rightarrow4\xi=9\Rightarrow\xi=\frac{9}{4}>2$, άρα $\xi\notin\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$.

Επομένως, $\nexists\ \xi$ που να ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. για την *f*.

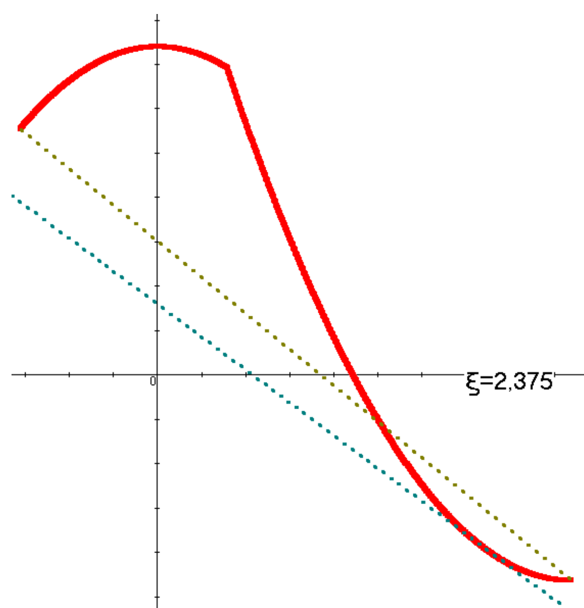
(iii)Οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες για να ισχύει το συμπέρασμα.

Θεωρούμε την *f* του προηγουμένου παραδείγματος, ορισμένη στο $[-1,3]$ ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}, & x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)\\ \frac{2}{3}(x-3)^2-\frac{5}{3}, & x=\left[\frac{1}{2},3\right]\end{cases}$$

με

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{4}{3}x, & x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)\\ \frac{4}{3}(x-3), & x=\left(\frac{1}{2},3\right)\end{cases}.$$



Δεν είναι συνεχής $[-1,3]$, αφού δεν είναι συνεχής στο $x_0=\frac{1}{2}$. Επομένως, δεν είναι ούτε παραγωγίσιμη στο $(-1,3)$.

Παρ' όλα αυτά, υπάρχει $\xi\in(-1,3):f'(\xi)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=-\frac{5}{6}$.

Πράγματι,

$$f'(\xi)=-\frac{5}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{4}{3}\xi=-\frac{5}{6}, & x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)\\ \frac{4}{3}(\xi-3)=-\frac{5}{6}, & x\in\left(\frac{1}{2},3\right)\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{5}{8}, & \text{απορρίπτεται διότι } \dfrac{5}{8} \notin \left(-1, \dfrac{1}{2}\right) \\ \xi \approx 2{,}375, & \text{δεκτή, διότι } \xi \in \left(\dfrac{1}{2}, 3\right) \end{cases}$$

Δηλαδή, $\exists\ \xi \approx 2{,}375 \in \left(\dfrac{1}{2}, 3\right) : f'(\xi) = -\dfrac{5}{6}$.

10. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

10.1. ΟΡΙΣΜΟΣ , ΜΕΛΕΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΟΥ

1. Μπορούν δύο συναρτήσεις με ίδια αναλυτική έκφραση να έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι δυνατόν, εάν ορίζονται σε διαφορετικά σύνολα.

Π.χ. η $f:(0,+\infty)\to$ Ñ με $f(x)=x^2$ είναι γνησίως αύξουσα,

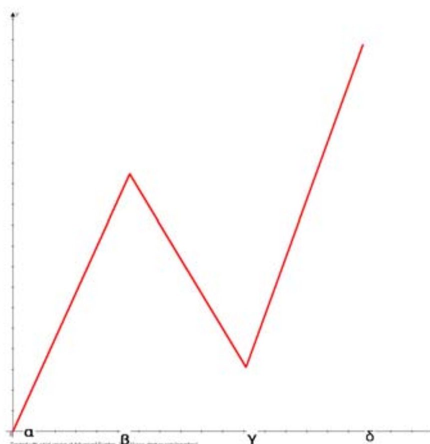
ενώ η $g:(0,-\infty)\to$ Ñ με $g(x)=x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Να βρεθεί μια μη μονότονη συνάρτηση, η οποία όμως να είναι μονότονη σε υποσύνολα του πεδίου του ορισμού της.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Μια τέτοια συνάρτηση είναι αυτή που έχει το παρακάτω γράφημα:

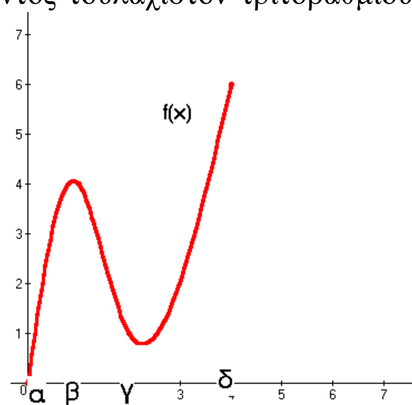
$f:[\alpha,\delta]\to$ Ñ

$$\left.\begin{array}{l} f/[\alpha,\beta] \text{ γνησίως αύξουσα} \\ f/[\beta,\gamma] \text{ γνησίως φθίνουσα} \\ f/[\gamma,\delta] \text{ γνησίως αύξουσα} \end{array}\right\} \text{η } f \text{ μη μονότονη.}$$



Το ανωτέρω παράδειγμα είναι απολύτως αποδεκτό. Αν όμως θέλουμε και την αναλυτική έκφραση της f , θα πρέπει να κάνουμε μία πολυωνυμική παρεμβολή σε αριθμητικές τιμές κατάλληλες εντός τουλάχιστον τριτοβαθμίου πολυωνύμου.

Για παράδειγμα αν α=0, β=1, γ=3, δ=4, τότε θέτοντας $f(0)=0, f(1)=2,$ $f(3)=0, f(4)=3,$ μπορώ να βρω ένα $4x4$ γραμμικό σύστημα, το οποίο να επιλύσω



κατά τα γνωστά, που είναι όμως χρονοβόρο. Το $f(0)=0$ δίνει $3x3$ αλλά και πάλι έχω μεγάλο σύστημα.

Θέτοντας στη θέση των β, δ τοπικά μέγιστα όπως φαίνεται στο γράφημα, με τη βοήθεια της θεωρία παραγώγων θα πρέπει $f'(\beta)=0, f'(\delta)=0$ ή ακόμα $f''\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=0$ (σημείο καμπής) και έτσι να παρακάμψω τους πολλούς αγνώστους και το χρονοβόρον της λύσεως.

Ακόμα πιο εύκολο είναι στην θέση των διαστημάτων μονοτονίας να παρεμβάλλω ευθύγραμμα τμήματα, πράγμα που υπολογιστικά είναι ακόμα πιο σύντομο, αλλά δεν έχω συνεχή συνάρτηση (που εδώ όμως, δεν χρειάζεται).

3. Να βρεθεί μία μη μονότονη συνάρτηση, η οποία να ορίζεται στο Ñ και για την οποία να μην υπάρχει διάστημα στο οποίο να είναι μονότονη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η συνάρτηση του Dirichlet διαθέτει τις παραπάνω προϋποθέσεις.

$f:$ Ñ $\to$ Ñ και $f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$.

Δεν είναι μονότονη, διότι:

$$\text{Αν } x_1 < x_2 = \begin{cases} f(x_1)=f(x_2)=1, & \text{αν } x_1, x_2 \text{ ρητοί}\\ f(x_1)=1>f(x_2)=0, & \text{αν } x_1 \text{ ρητός, } x_2 \text{ άρρητος}\\ f(x_1)=0<1=f(x_2), & \text{αν } x_1 \text{ άρρητός, } x_2 \text{ ρητός}\\ f(x_1)=0=f(x_2), & \text{αν } x_1, x_2 \text{ άρρητοι}\end{cases}.$$

Αν θεωρήσω τον περιορισμό της f σε οποιοδήποτε διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε ανάμεσα στα x_1, x_2 υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι και ομοίως δεν είναι μονότονη.

4. Να βρεθεί συνάρτηση, της οποίας η μονοτονία να μη μπορεί να μελετηθεί με τις μεθόδους τους απειροστικού λογισμού, αλλά μόνο με κλασσική Άλγεβρα.

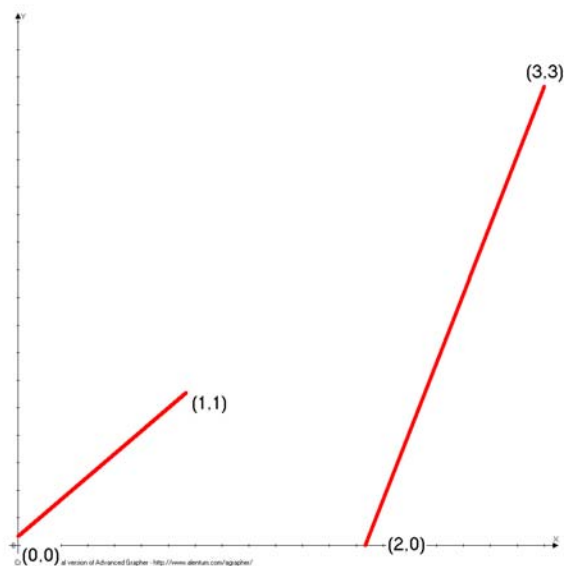
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι η συνάρτηση του Dirichlet, η οποία είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και (άρα) μη παραγωγίσιμη, παντού.

5. Αν μία συνάρτηση είναι μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε –ως γνωστόν- θα είναι μονότονη και σε κάθε υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Να αποδειχθεί ότι αν είναι μονότονη σε υποσύνολα του Π.Ο. της, δεν έπεται ότι είναι και μονότονη στο Π.Ο. της .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στην εφ.2 του παρόντος κεφαλαίου, έχω συνάρτηση μονότονη κατά διαστήματα, αλλά μη μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

6. «Αν μία συνάρτηση *f* είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 \subseteq D(f)$ και γνησίως αύξουσα επίσης στο διάστημα $\Delta_2 \subseteq D(f)$ με $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varphi$, τότε θα είναι γνησίως αύξουσα και στο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$».
Να αποδειχθεί η ανωτέρω πρόταση αν είναι αληθής ή να δοθεί κατάλληλο αντιπαράδειγμα, αν είναι ψευδής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι ψευδής.
Α.χ. Στο παρακάτω σχήμα έχω το γράφημα μια συνάρτησης f, η οποία
Είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.
Είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$.



Αλλά η f δεν είναι μονότονη στο $[0,1] \cup [2,3]$ αφού ο λόγος για τον οποίο η f δεν είναι γνησίως αύξουσα είναι ότι υπάρχουν π.χ.

$1,2,3 \in \Delta$ με

$1 < 2 < 3$ και $f(1) = 1 > 0 = f(2)$
και $f(2) = 0 >< 3 = f(3)$.

→ Χρησιμοποιήσαμε την άρνηση του ορισμού της γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

→ Για να ισχύει το συμπέρασμα της πρότασης σε οποιαδήποτε ένωση δύο διαστημάτων (ανοικτών ή κλειστών) θα πρέπει προφανώς:

Αν $\Delta_1 = (\alpha, \beta)$ ή $[\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta)$ ή $(\alpha, \beta]$

και $\Delta_2 = (\gamma,\delta)$ ή $[\gamma,\delta]$ή $[\gamma,\delta)$ ή $(\gamma,\delta]$,

τότε $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) < \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

→ Ανάλογα ισχύουν για συνάρτηση σε διαστήματα όπου είναι γνησίως φθίνουσα.

7. Είναι γνωστό ότι ισχύει η πρόταση:«Αν $f:\Delta \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ».
Να αποδείξετε με κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ότι δεν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

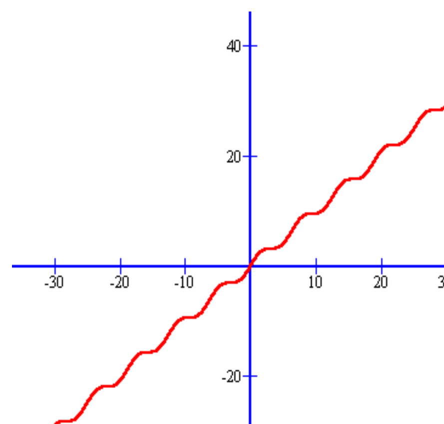
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα , όμως $f'(0)=0$.

8. Να βρεθεί συνάρτηση, η οποία να είναι γνησίως αύξουσα στο Ñ και η οποία να έχει άπειρα σημεία στα οποία να μηδενίζεται η πρώτη παράγωγός της.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την f :Ñ → Ñ με $f(x) = x + \eta\mu x$. Η f είναι γνησίως αύξουσα.

Όμως $f'(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ και η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \left(x = (2\kappa+1)\pi, \;\; \kappa\in\mathbb{Z}\right)$.

Δηλαδή, έχω άπειρες αριθμήσιμες τιμές για τις οποίες $f'(x)=0$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα.



9. Υπάρχει συνάρτηση f με $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ που είναι συνεχής και η οποία σε κάθε διάστημα που περιέχει το x_0, οσοδήποτε μικρό, δεν είναι μονότονη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι η f :Ñ* → Ñ και. $f(x) = \eta\mu\frac{1}{x}, \quad x_0 = 0$

Γι' αυτήν έχω:

- Είναι συνεχής στο Δ(f) = Ñ*.

- $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{x}$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{x} = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \text{Ù} \right) \Leftrightarrow \left(x = \dfrac{1}{2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{2}}, \kappa \in \text{Ù} \right)$

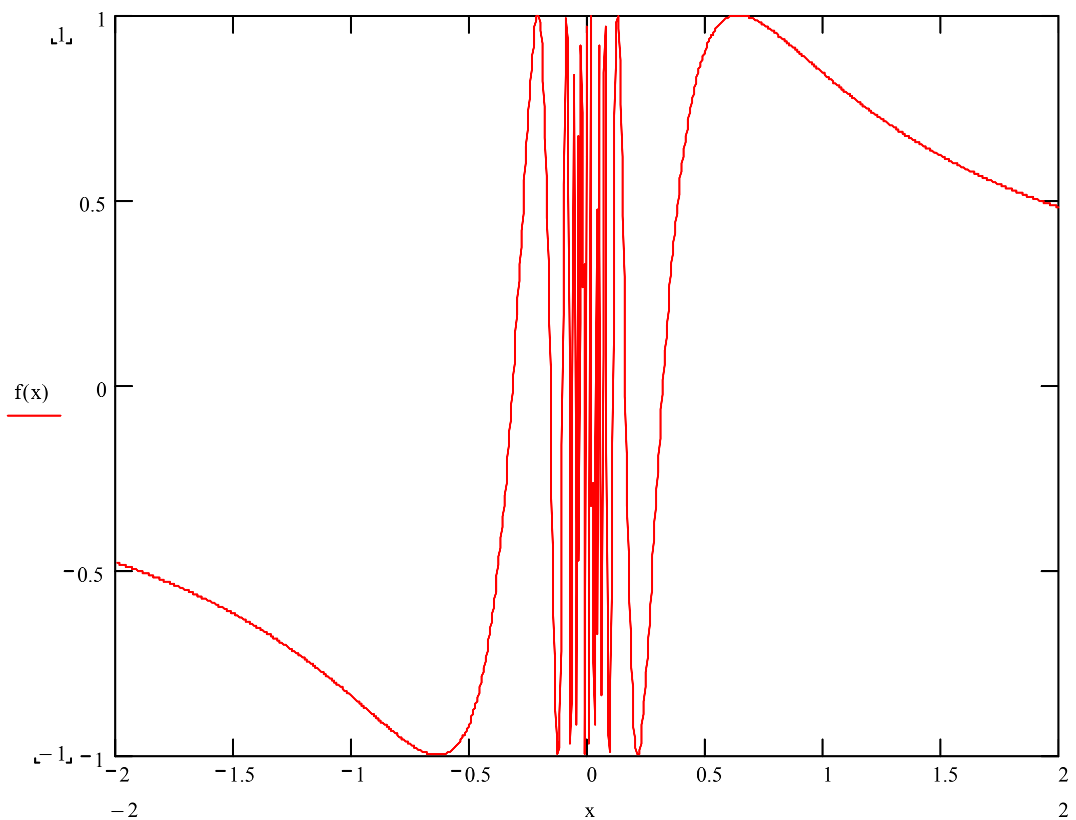
$\nexists\, f'(0)$.

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \left(2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{1}{x} < 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}} < x < \dfrac{1}{2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}}$

(1)

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \dfrac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \left(2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{1}{x} < 2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2} \right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}} < x < \dfrac{1}{2\kappa\pi + \dfrac{3\pi}{2}}$

(2)



Από (1) και (2) έχω ότι για κατάλληλα μεγάλο $\kappa \in$ Ù τα διαστήματα όπου $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$ γίνονται όσο θέλουμε στενά. Δηλαδή γενικότερα, όταν $\kappa \to \pm\infty$ τα διαστήματα μονοτονίας στενεύουν απεριόριστα. Με άλλα λόγια, γύρω από το 0, η f, δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο. Από αύξουσα γίνεται φθίνουσα (και αντιστρόφως) σε πολύ «μικρά» διαστήματα που τείνουν να έχουν πλάτος 0.

Άρα: Δεν υπάρχουν διαστήματα γύρω από το 0, όπου η f να είναι μονότονη.

10.2. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΜΟΝΟΤΟΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α. ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Αν η f είναι μονότονη, τότε η $f + \alpha$ ($\alpha \in$ Ñ) είναι μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.
2. Αν η f είναι μονότονη, τότε η $\alpha \cdot f$ ($\alpha \in$ Ñ) είναι μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας αν $\alpha > 0$ και μονότονη με αντίθετο είδος μονοτονίας αν $\alpha < 0$.
3. Αν η $f \neq 0$ σε διάστημα *Δ* διατηρεί σταθερό πρόσημο, η f μονότονη, η $\frac{1}{f}$ έχει αντίθετο είδος μονοτονίας.
4. Αν f μονότονη και υπάρχει $\sqrt{f}$, τότε έχει και αυτή το ίδιο είδος μονοτονίας.
5. Αν f μονότονη, τότε η f^2 έχει:

   (i) Το ίδιο είδος μονοτονίας αν $f > 0$.

   (ii) Το αντίθετος είδος αν $f < 0$.

6. Αν f,g συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού Α , τότε:

(f αύξουσα και g αύξουσα) $\Rightarrow$ f+g αύξουσα

(f φθίνουσα και g φθίνουσα) $\Rightarrow$ f+g φθίνουσα

(f αύξουσα και g γν. αύξουσα) $\Rightarrow$ f+g αύξουσα

(f φθίνουσα και g γν. φθίνουσα) $\Rightarrow$ f+g φθίνουσα

7. Αν f,g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού A , $f(x) > 0 \quad \forall x \in A$.

και $g(x) > 0 \quad \forall x \in A$, τότε:

(f αύξουσα, g αύξουσα) $\Rightarrow$ fg αύξουσα

(f φθίνουσα, g φθίνουσα) $\Rightarrow$ fg φθίνουσα

(f αύξουσα, g γν. αύξουσα) $\Rightarrow$ fg αύξουσα

(f φθίνουσα, g γν. φθίνουσα) $\Rightarrow$ fg φθίνουσα

8. Αν f ,g δύο συναρτήσεις και για τις οποίες ορίζεται η σύνθεσή τους $f \circ g$, τότε :

(f αύξουσα και g αύξουσα) $\Rightarrow f \circ g$ αύξουσα

(f αύξουσα και g φθίνουσα) $\Rightarrow f \circ g$ φθίνουσα

(f φθίνουσα και g αύξουσα) $\Rightarrow f \circ g$ φθίνουσα

(f φθίνουσα και g φθίνουσα) $\Rightarrow f \circ g$ αύξουσα

Ακολουθείται δηλαδή κατ' αντιστοιχίαν ο κανόνας των προσήμων στον πολλαπλασιασμό πραγματικών , όπου «αύξουσα» το «+» και όπου «φθίνουσα» το «-».

9. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και επί, τότε υπάρχει η f^{-1} με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Β. ΜΗ ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ

1. Κάθε άρτια συνάρτηση, δεν είναι γνησίως μονότονη.
2. Κάθε περιοδική συνάρτηση, δεν είναι γνησίως μονότονη.

Γ. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ

1. Αν η f γνησίως μονότονη στο A, τότε η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο A.

2. Τα γραφήματα μια γνησίως αύξουσας συνάρτησης f και μίας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης g, μπορεί να τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο . (Ισοδυνάμως η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία το πολύ ρίζα).

Δ. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΓΕΝΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΓΝΩΣΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Ομοπαραλληλική: $f(x)=\alpha x+\beta$.
   a. Αν $\alpha>0$, η f γνησίως αύξουσα.
   b. Αν $\alpha<0$, η f γνησίως φθίνουσα.
   c. Αν $\alpha=0$, $f(x)=\beta$ σταθερή που θεωρείται και αύξουσα και φθίνουσα.

2. Τριωνυμική: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $(\alpha\neq 0)$

(i) $\alpha<0$, στο $\left(-\infty,-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$ γνησίως αύξουσα και στο $\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$ γνησίως φθίνουσα.

(ii) $\alpha>0$, στο $\left(-\infty,-\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)$ γνησίως φθίνουσα και στο $\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$ γνησίως αύξουσα.

3. Ομογραφική: $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,\ \gamma\neq 0$

(i) Αν $\alpha\delta-\beta\gamma<0$, στο $\left(-\infty,-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$ γνησίως φθίνουσα και στο $\left(-\dfrac{\delta}{\gamma},+\infty\right)$ γνησίως αύξουσα.

(ii) Αν $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, στο $\left(-\infty,-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$ γνησίως αύξουσα και στο $\left(-\dfrac{\delta}{\gamma},+\infty\right)$ γνησίως φθίνουσα.

4. $f(x)=x^{\alpha}$

(i) Αν $a=2n,\ n\in$ Í, D$(f)=$ Ñ, στο $(-\infty,0)\downarrow$, στο $(0,+\infty)\uparrow$.

(ii) Αν $a=2n-1,\ n\in$ Í, D$(f)=$ Ñ, στο Ñ* $\uparrow$.

(iii) Αν $a=-2n,\ n\in$ Í, D$(f)=$ Ñ*, στο $(-\infty,0)\uparrow$, στο $(0,+\infty)\downarrow$.

(iv) Αν $a=-2n+1,\ n\in$ Í , $\mathrm{D}(f)=$ Ñ*, στο Ñ* $\downarrow$.

(v) Αν $a\in$ Ñ − Ù$,\alpha>0$ $\mathrm{D}(f)=$ Ñ$_{++}$ στο $(0,+\infty)\uparrow$.

(vi) Αν $a\in$ Ñ − Ù$,-\alpha>0$ $\mathrm{D}(f)=$ Ñ$^{*}_{++}$ στο $(0,+\infty)\downarrow$.

5. Η εκθετική $f(x)=a^{x}$, $0<a\neq 1,$ $\mathrm{D}(f)=$ Ñ

(i) Αν $a<1$, η $f\downarrow$.

(ii) Αν $a>1$, η $f\uparrow$.

6. Η λογαριθμική $f(x)=log_{a}x$, $0<a\neq 1,$ $\mathrm{D}(f)=$ Ñ$^{*}_{++}$

(i) Αν $a<1$, η $f\downarrow$.

(ii) Αν $a>1$, η $f\uparrow$.

7. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις: ($\kappa\in$ Ù)

(i) $f(x)=$ ημx, Αν $x\in\left(2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $f\uparrow$.

Αν $x\in\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $f\downarrow$.

(ii) $f(x)=$ συνx, Αν $x\in(2\kappa\pi,2\kappa\pi+\pi)$, τότε $f\downarrow$.

Αν $x\in(2\kappa\pi+\pi,2\kappa\pi+2\pi)$, τότε $f\uparrow$.

(iii) $f(x)=$ εφx, Αν $x\in\left(\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $f\uparrow$.

(iv) $f(x)=$ σφx, Αν $x\in(\kappa\pi,\kappa\pi+\pi)$, τότε $f\downarrow$.

11. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Σχέση πεδίου τιμών συνεχούς συνάρτησης f , με φράγμα , infimum , supremum, max, min, της f.

Πεδίο Τιμών	Κάτω φράγμα	Inf f	Άνω φράγμα	Sup f	Ολικό min	Ολικό max
$(-\infty,a)$	Δεν έχει	Δεν έχει	$\Phi\geq\alpha$	α	Δεν έχει	Δεν έχει
$(-\infty,a]$	Δεν έχει	Δεν έχει	$\Phi\geq\alpha$	α	Δεν έχει	α
(a,β)	$\phi\leq\alpha$	α	$\Phi\geq\alpha$	β	Δεν έχει	Δεν έχει
$(\alpha,\beta]$	$\phi\leq\alpha$	α	$\Phi\geq\alpha$	β	Δεν έχει	β
$[\alpha,\beta)$	$\phi\leq\alpha$	α	$\Phi\geq\alpha$	β	α	Δεν έχει
$[\alpha,\beta]$	$\phi\leq\alpha$	α	$\Phi\geq\alpha$	β	α	β
$[\beta,+\infty)$	$\phi\leq\alpha$	β	Δεν έχει	Δεν έχει	β	Δεν έχει
$(\beta,+\infty)$	$\phi\leq\alpha$	β	Δεν έχει	Δεν έχει	Δεν έχει	Δεν έχει
{a}	$\phi\leq\alpha$	α	$\Phi\geq\alpha$	α	α	α

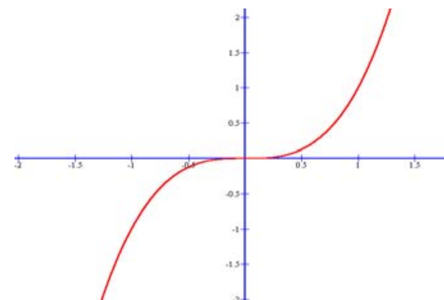
11.1. ΟΡΙΣΜΟΣ, ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ , ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΚΑΙ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑ.

1. Υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης, η οποία δεν έχει τοπικά , ούτε ολικά μέγιστα ή ελάχιστα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

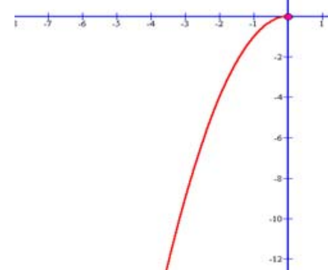
με $f(x)=x^3$

Εκτός από την συγκεκριμένη f, μπορούμε να παραθέσουμε και οποιαδήποτε μονότονη στο $\mathbb{R}$.



2. Υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης, η οποία έχει μόνο ολικό μέγιστο, το οποίο είναι συγχρόνως και τοπικό, ενώ δεν έχει τοπικό ή ολικό ελάχιστο.

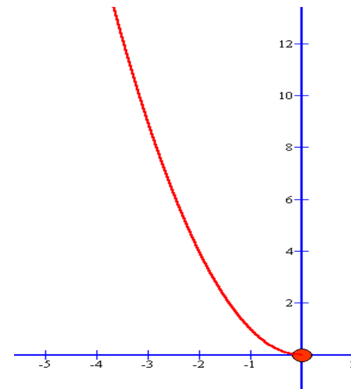
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f:\mathbb{R}\to(-\infty,0]$ με $f(x)=-x^2$ εκπληροί τα προηγούμενα



.

3. Υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης, η οποία έχει μόνο ολικό και συγχρόνως τοπικό ελάχιστο και κανένα μέγιστο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.



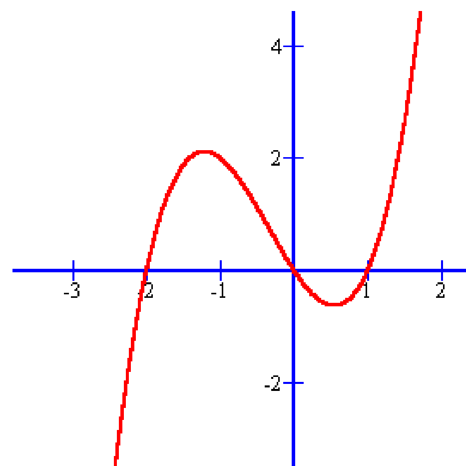
4. Υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης που έχει μόνο τοπικά, αλλά δεν έχει ολικά ακρότητα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f : Ñ \to Ñ$ με $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

Η $f(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1, -2.

Η $f^{'}(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}$, όπου είναι και οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων.

Η f δεν έχει ολικά ακρότατα, αφού $D(f) = Ñ$.



5. Υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης, της οποίας το ολικό μέγιστο δεν είναι τοπικό μέγιστο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f : [0,1] \to [0,1]$ με $f(x) = x$.

Στο 1 έχω ολικό μέγιστο το $f(1) = 1 \geq f(x), \forall x \in [0,1]$.

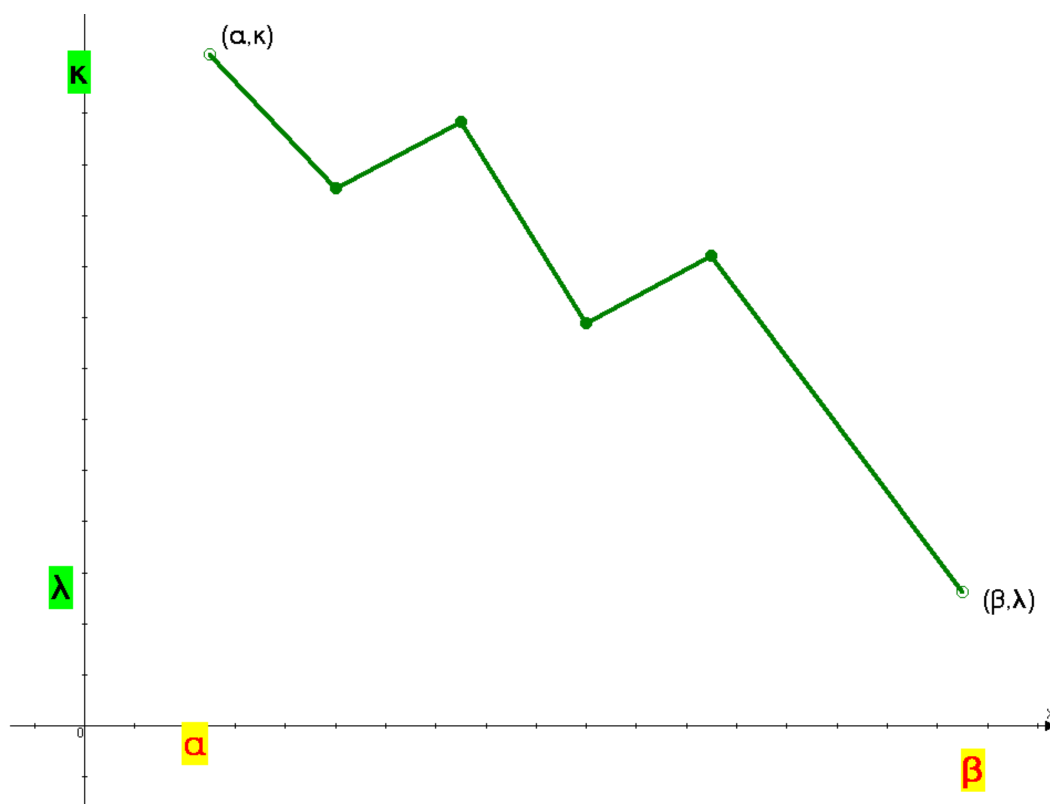
Στο 1 δεν έχω και τοπικό μέγιστο, **διότι βάσει του ορισμού τοπικού ακροτάτου**, θα πρέπει να υπάρχει ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq D(f)$ και $1 \in (\alpha, \beta)$, όπου $f(1) \geq f(x), \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Τέτοιο όμως διάστημα, προφανώς δεν υπάρχει.

Επίσης, (ομοίως) στο 0 έχω ολικό ελάχιστο, το οποίο δεν είναι τοπικό ελάχιστο.

6. Να εξεταστεί, αν είναι δυνατόν σε μία συνάρτηση να υπάρχουν τοπικά ακρότατα, αλλά να μην υπάρχουν ολικά ακρότατα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f:(\alpha,\beta)\rightarrow(\kappa,\lambda)$ με γραφική παράσταση όπως φαίνεται παρακάτω, έχει τοπικά ακρότατα, αλλά δεν έχει ολικά.

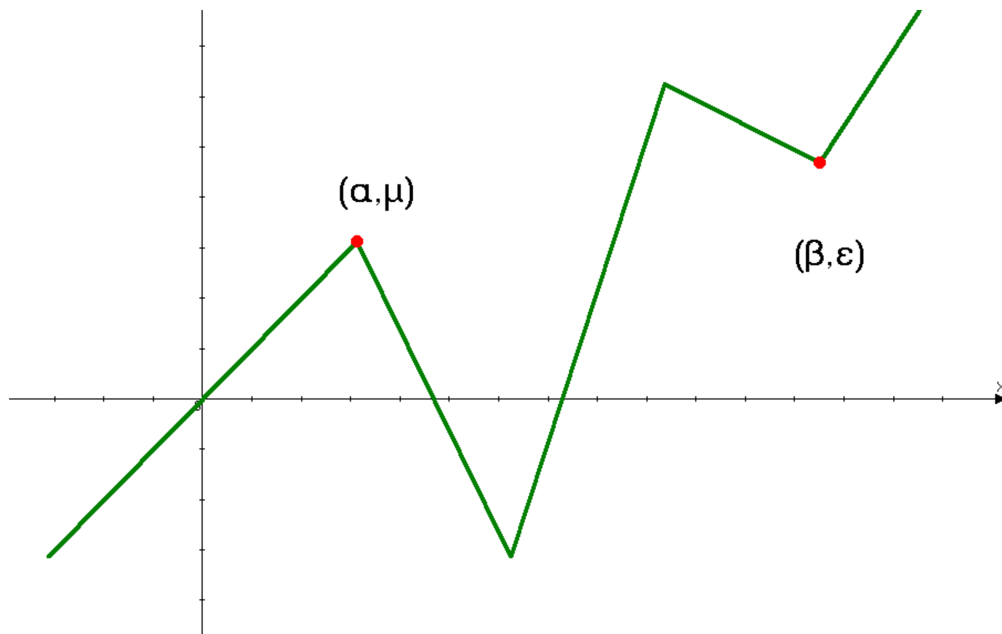


7. Δείξτε, ότι είναι δυνατόν, το ολικό μέγιστο, να μην είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα καθώς και το ολικό ελάχιστο να μην είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η προηγούμενη γραφική παράσταση, αν θεωρηθεί ως $f:[\alpha,\beta]\rightarrow[\kappa,\lambda]$, τότε εκπληροί όλες τις συνθήκες. Συμπεριλαμβάνονται δηλ. στην γραφική παράσταση συνάρτηση και τα σημεία (α,κ) και (β,λ)

8. Είναι δυνατόν τοπικό ελάχιστο να είναι μεγαλύτερο από τοπικό μέγιστο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι δυνατόν. Στο παρακάτω σχήμα έχω $f: Ñ \to Ñ$ που εκπληροί την τεθείσα συνθήκη. Το ε είναι τοπικό ελάχιστο και το μ τοπικό μέγιστο, όμως $\mu<\varepsilon$.

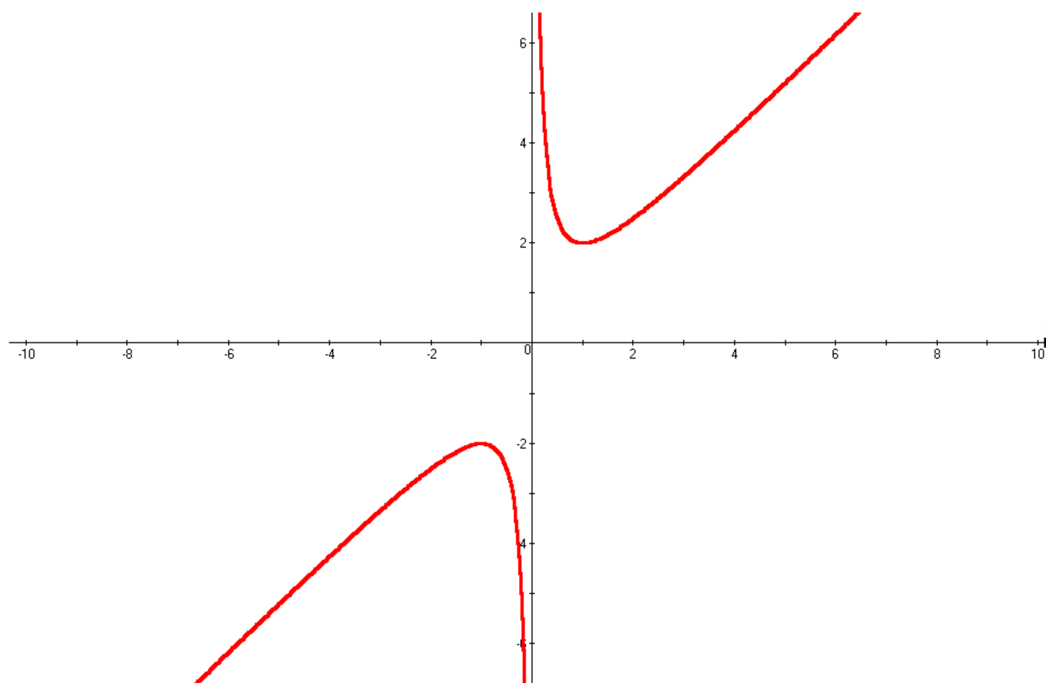


Ως παράδειγμα συνάρτησης σε αναλυτική μορφή έχω την $f: Ñ^* \to Ñ$ με $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

$f'(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$, $f'(x) = (x = 1 \text{ ή } x = -1)$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $f''(-1) = -2 < 0$, $f''(1) = 2 > 0$.

Επομένως, στο -1 έχω τοπικό μέγιστο, το $f(-1) = -2$ και στο $+1$ έχω τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 2$.

Προφανώς $f(-1) < f(1)$ και εκπληρούται η αρχική συνθήκη.



9. Υπάρχει συνάρτηση της οποίας κάθε σημείο να είναι ολικό μέγιστο και ταυτοχρόνως ολικό ελάχιστο;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η σταθερή συνάρτηση $f : Ñ \to Ñ$ με $f(x) = \subset$ εκπληροί την τεθείσα συνθήκη, αφού αν $x_0 \in Ñ$, $f(x_0) = c \le c = f(x)$, $\forall x \in Ñ$ και $f(x_0) = c \ge c = f(x)$, $\forall x \in Ñ$.

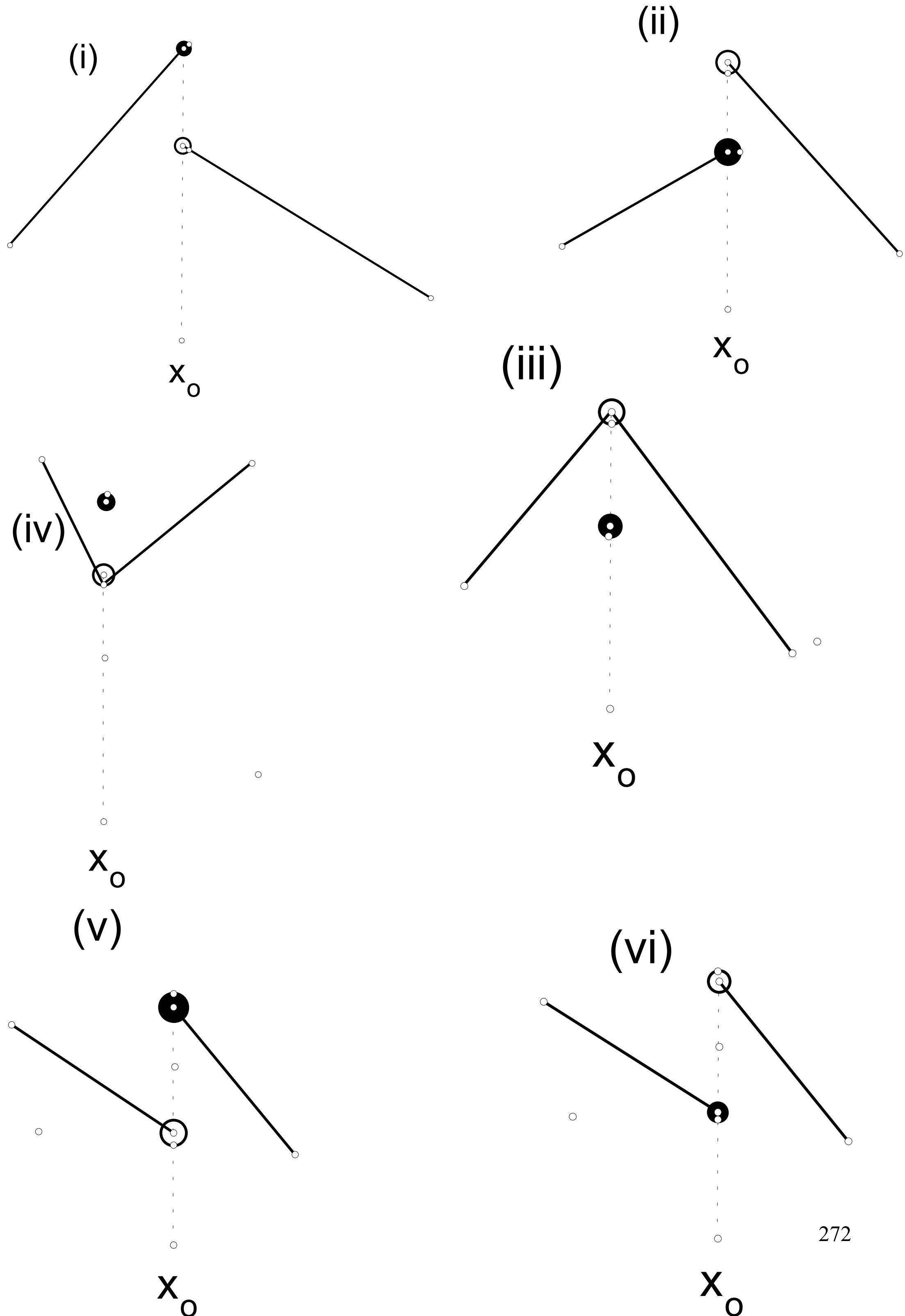
10. Σε <u>μη συνεχή</u> συνάρτηση στο x_0, να παραθέσετε παράδειγμα, όπου:		
	(i)	**Εκατέρωθεν του x_0 να έχω αλλαγή μονοτονίας και ακρότατο στο x_0.**
	(ii)	**Εκατέρωθεν του x_0 να έχω αλλαγή μονοτονίας, χωρίς να έχω ακρότατο στο x_0.**
	(iii)	**Αριστερά του x_0 να είναι αύξουσα, δεξιά του φθίνουσα και στο x_0 να έχω τοπικό ελάχιστο.**
	(iv)	**Αριστερά του x_0 να είναι φθίνουσα, δεξιά του αύξουσα και στο x_0 να έχω τοπικό μέγιστο**
	(v)	**Χωρίς να έχω αλλαγή μονοτονίας εκατέρωθεν του x_0, να έχω**

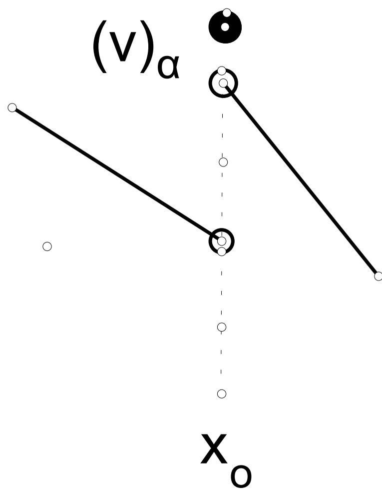
τοπικό μέγιστο στο x_0.

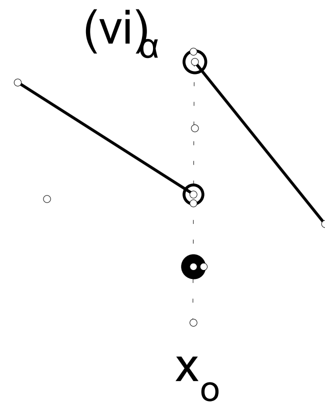
(vi) **Χωρίς να έχω αλλαγή μονοτονίας εκατέρωθεν του x_0, να έχω τοπικό ελάχιστο στο x_0.**

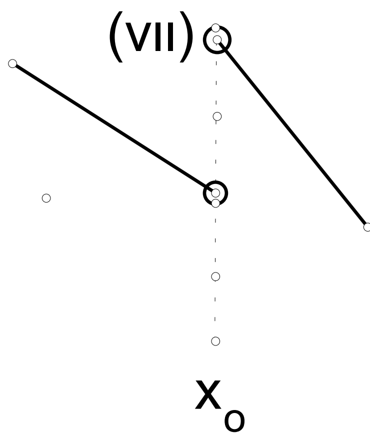
(vii) **Χωρίς να έχω αλλαγή μονοτονίας εκατέρωθεν του x_0, να μην έχω τοπικό ακρότατο στο x_0.**

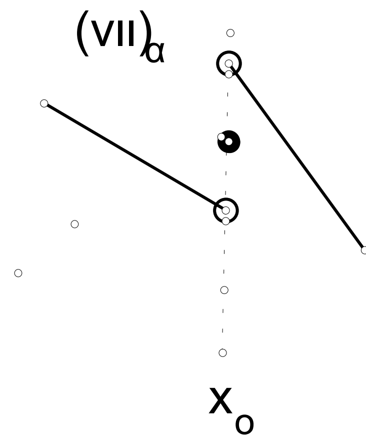
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:











11. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης $f:$ Ñ $\to$ Ñ η οποία σε κάθε υποδιάστημα του Ñ, οσοδήποτε «μικρό», να περιέχει άπειρα ακρότατα της *f*.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f:$ Ñ $\to$ Ñ με

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x \text{ άρρητος}\\ 0, & \text{αν } x \text{ ρητός}\end{cases}$$

Σε κάθε διάστημα υποσύνολο του Ñ, περιέχονται άπειροι (και αριθμήσιμοι) ρητοί και άπειροι (και υπεραριθμήσιμοι) άρρητοι. Επομένως, έχω άπειρες (υπεραριθμήσιμες) θέσεις όπου έχω μέγιστη τιμή το 1 (είτε για κάθε ρητό είτε για κάθε άρρητο) και άπειρες (αριθμήσιμες) θέσεις όπου έχω ελάχιστη τιμή το 0 (για τους ρητούς).

12. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης, η οποία να έχει άπειρα (αριθμήσιμα) σημεία στα οποία να έχουμε τοπικά και ολικά μέγιστα ή ελάχιστα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η $f : \text{Ñ} \to \text{Ñ}$ με $f(x) = \text{ημx}$, για $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \text{Ù}$ έχω άπειρα τοπικά και ολικά μέγιστα, αφού $\eta\mu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \forall \kappa \in \text{Ù}$, ενώ για $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \text{Ù}$, έχω άπειρα τοπικά και ολικά ελάχιστα, αφού $\eta\mu\left(2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1,\ \forall \kappa \in \text{Ù}$.

13. Να δοθεί παράδειγμα συναρτήσεως, η οποία να έχει *κ* το πλήθος $(\kappa \in \text{Ù})$ τοπικά ακρότατα, διάφορα ανά δύο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ορίζουμε:

$$f(x) = 2^{[x]} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in [0,1) \\ 2, & x \in [1,2) \\ 2^2, & x \in [2,3) \\ 2^3, & x \in [3,4) \\ \ldots.., & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots.., & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots.., & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^\kappa, & x \in [\kappa, \kappa+1) \end{array} \right\} \kappa \in \mathbb{Z}$$

Η f έχει πεδίο τιμών $\Re(f) = \{1, 2, 2^2, \ldots 2^\kappa\}$, έχει κ το πλήθος τοπικά ελάχιστα (ή μέγιστα) μέγιστο.

14. Να κατασκευασθεί συνάρτηση $f : \text{Ñ} \to \text{Ñ}$, η οποία να έχει *κ* το πλήθος

$(\kappa \in$ Ù$)$ **τοπικά ακρότατα σε δεδομένες θέσεις του συνόλου** $A=\{x_1,x_2,\ldots x_\kappa\}\subseteq$ Ñ **και η οποία να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Περιγραφικά η κατασκευή γίνεται ως εξής:

Αν η f πολυωνυμική, τότε $f'(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\kappa)$, η οποία έχει ρίζες της πρώτης παραγώγου τους αριθμούς $x_1,x_2,\ldots x_\kappa$, έχω εναλλαγή προστίμου ανάμεσα στα διαστήματα των ριζών, άρα έχω ακρότατα. Η f προσδιορίζεται με μια απλή εύρεση αρχικής συνάρτησης (αόριστο ολοκλήρωμα).

15. Να αποδειχθεί ότι είναι δυνατόν:

Να υπάρχει συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη τουλάχιστον σε διάστημα (α,β), και $x_0\in(a,\beta)$, έτσι ώστε σε κάθε διάστημα της μορφής (κ,x_0) να μην έχω ένα είδος μονοτονίας, και σε κάθε διάστημα της μορφής (x_0,λ), επίσης να μην έχω ένα είδος μονοτονίας, κι εν τούτοις, στο x_0 να έχω τοπικό ακρότατο (π.χ. ελάχιστο της *f*).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι δυνατόν, σε μια συνεχή συνάρτηση, σε σημείο της x_0, να μην έχω αλλαγή μονοτονίας εκατέρωθεν του x_0 και παρόλα ταύτα, να έχω στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

Θεωρώ την f : Ñ → Ñ με $f(x)=\begin{Bmatrix} x^4\eta\mu^2\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{Bmatrix}$.

Η f είναι συνεχής στο 0 αλλά και παραγωγίσιμη στο 0 με

$$f'(x)=\begin{Bmatrix} 4x^3\eta\mu^2\frac{1}{x}-x^2\eta\mu\frac{2}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{Bmatrix}.$$

Αποδεικνύω ότι $f'(0)=0$.

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+0)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^4\eta\mu^2\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h^3\cdot\text{ημ}^2\frac{1}{2}=0$$

ως γινόμενο της απειροστή h^3 επί την φραγμένη $\text{ημ}^2\frac{1}{h}$.

Ως παραγωγίσιμη στο 0, έπεται ότι είναι και συνεχής στο 0.

$$f''(x)=\begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}-6x\eta\mu^2\frac{2}{x}+12x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

Η απόδειξη ότι $f''(0)=0$.

$$f''(0)=\lim_{h\to 0}\frac{4h^3\eta\mu\frac{1}{h}-h^2\eta\mu\frac{2}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(4h^2\eta\mu\frac{1}{h}-h\eta\mu\frac{2}{h}\right)=0$$

(ως απειροστές επί φραγμένες, όπως και προηγουμένως).

Επειδή $f''(0)=0$, πρέπει να προχωρήσουμε σε παραγωγίσεις, μέχρι να βρούμε την πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγο. Αλλά η $f''(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αφού η παράσταση $2\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}$ δεν είναι συνεχής. Για παράδειγμα, αν θεωρήσω $x_n=\frac{1}{n\pi}\to 0$, τότε $2\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x}=2\sigma\upsilon\nu\frac{2}{\frac{1}{n\pi}}=2\sigma\upsilon\nu 2n\pi=2\to 2$, ενώ αν θεωρήσω $x_n'=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0$, τότε $2\sigma\upsilon\nu\frac{2}{x_n'}=2\sigma\upsilon\nu(2n\pi+\pi)=-2\to -2$.

Τελικά η $f''(x)$ στο 0 δεν είναι συνεχής. Άρα $\nexists f'''(0)$. (Αν υπήρχε θα είχα συνέχεια στο $f''(0)$, άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της β' παραγώγου. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της α' παραγώγου:

Θεωρώ διάστημα $(h,0), h\to 0, h<0$. Σε αυτό το (οσοδήποτε «μικρό») διάστημα, θα προσπαθήσουμε να βρούμε το πρόσημο της $f'(x), \forall x$.

Θεωρώ τα σημεία $A(0,0)$ και $B(h,f(h))$ και τη χορδή AB. Η κλίση της AB είναι:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\frac{h^4\eta\mu^2\frac{1}{h}-0}{h}=h^3\eta\mu^2\frac{1}{h}<0$$

($\eta\mu^2\frac{1}{h}>0\ \forall h$, και $h^3<0$, όταν $h<0$, άρα $h^3\eta\mu^2\frac{1}{h}<0$).

Αυτό σημαίνει, ότι η χορδή AB μπορεί να έχει οποιαδήποτε αρνητική κλίση.

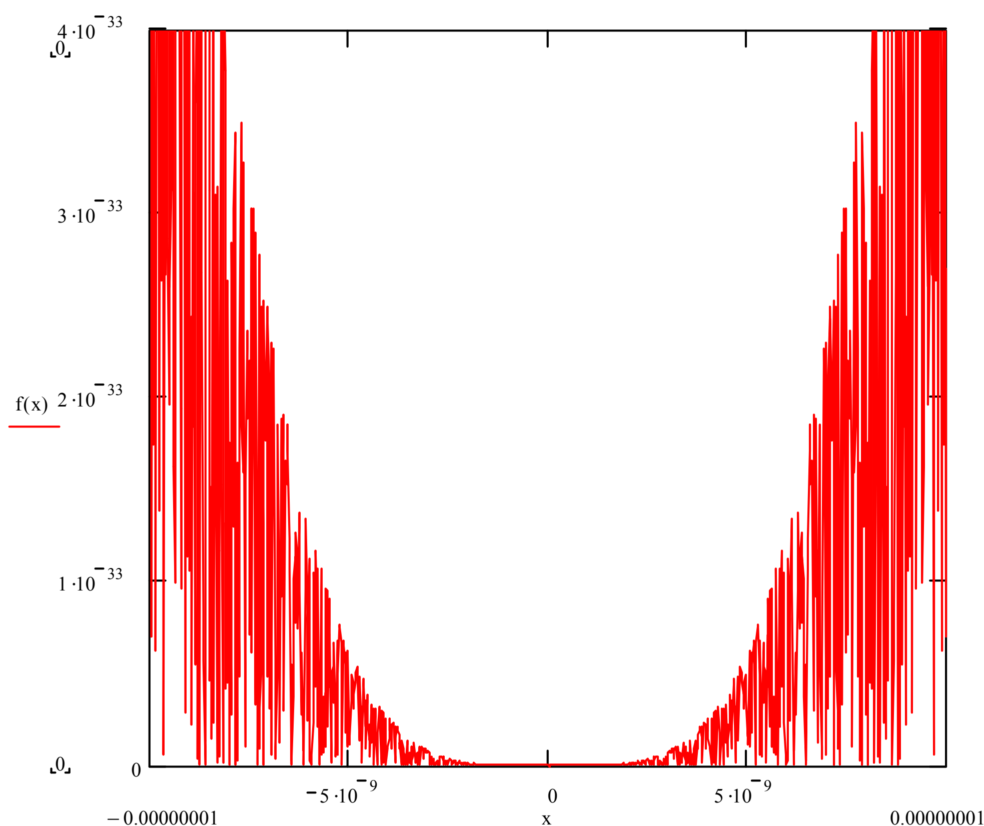
Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει $x \in (h,0)$, ώστε $f^{'}(x) = h^3 ημ^2 \frac{1}{h} < 0$. Για τα διάφορα $h \to 0, h < 0$, υπάρχουν $x \in (h,0): f^{'}(x)$ αρνητικός.

Δηλαδή __$x : f^{'}(x) < 0$, σε κάθε διάστημα αριστερά και οσοδήποτε κοντά στο 0.

Ομοίως, συμπεραίνουμε ότι $f^{'}(x) > 0$, σε κάθε διάστημα δεξιά και οσοδήποτε κοντά στο 0.

Σύμφωνα με το κριτήριο της α' παραγώγου, τα προηγούμενα έχουν ως συνέπεια η f να έχει ελάχιστο στο0, το 0.

Επειδή $0 \le ημ^2 \frac{1}{x} \le 1, \; \forall x \to 0 \le x^2 ημ^2 \frac{1}{x} \le x^2$ και η f περιέχεται ανάμεσα στην ευθεία y=0 και την παραβολή $y = x^2$.



Να σημειωθεί ότι την ανωτέρω γραφική παράσταση την πήραμε από το λογισμικό «MathCAD» που έχει την επί τούτω δυνατότητα. Στα άλλα λογισμικά γραφικών , όλη αυτή η ταλάντωση παριστάνεται ως μία απλή τετραγωνική καμπύλη που έχει ελάχιστο στο 0 και εφάπτεται του άξονα xx' στο 0 , όπως και η καμπύλη $y = x^2$ (!!!) . Ως επί πλέον σχόλιο, να δηλώσουμε

για άλλη μια φορά τα πεπερασμένα όρια των υπολογιστών , αλλά και των λογισμικών. Δεν μπορούμε να βασιζόμαστε πάνω τους ούτε και για την εποπτεία. Παράλληλα , ο «χειροκίνητος» υπολογισμός τιμών της συγκεκριμένης συνάρτησης σε μικρή περιοχή του μηδενός είναι πρακτικά ανέφικτος , αφού ένας αριθμός μικρότερος της μονάδος, στην τετάρτη δύναμη μειώνεται πάρα πολύ, ενώ ο αντίστροφός του αυξάνεται πάρα πολύ. Ο υπολογισμός του ημιτόνου του τετραγώνου του και του γινομένου $x^4\eta\mu^2\frac{1}{x}$ μπορεί να δημιουργήσει πάμπολλα λάθη στρογγυλοποίησης, έτσι που δεν έχει κανένα νόημα ο δια χειρός υπολογισμός . Γι αυτό εξ άλλου αποτυγχάνουν και τα απλά λογισμικά , αφού έχουν μικρό όριο ψηφίων με τα οποία κάνουν υπολογισμούς και αναπόφευκτες στρογγυλοποιήσεις. Το Mathematica και το MathCAD ξεπερνούν αυτά τα όρια κατά πολύ, αλλά κι αυτά βεβαίως , είναι λογισμικά. Αν αντί χ^4 έχουμε χ^{75} το MathCAD 2000 Pro μπορεί να επιτελέσει την σχεδίαση. Για χ^{76} όμως αποτυγχάνει και έχω πάλι σχεδίαση απλής καμπύλης . Προφανώς , υπερέβημεν το σχεδιαστικό του όριο.

Πάντως, η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι η «Λυδία λίθος» ελέγχου της καλής δυνατότητας ενός σχεδιαστικού προγράμματος και άρα αποτελεί αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό ότι **«τα απλά σχεδιαστικά λογισμικά μπορούν να σχεδιάζουν ικανοποιητικά όλες τις συνεχείς ή κατά τμήματα συναρτήσεις εκτός από τις «τύπου Dirichlet»** Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα συνεχούς συναρτήσεως που τα απλά λογισμικά αποτυγχάνουν παταγωδώς.

16. Υπάρχει συνάρτηση f:

- **Ορισμένη στο $[\alpha,+\infty)$ και συνεχής**
- **Στο α δεν έχει ακρότατο.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε την $f:[0+\infty)\to$ Ñ με $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Για κάθε $x>0$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών και σύνθετη συνεχών.

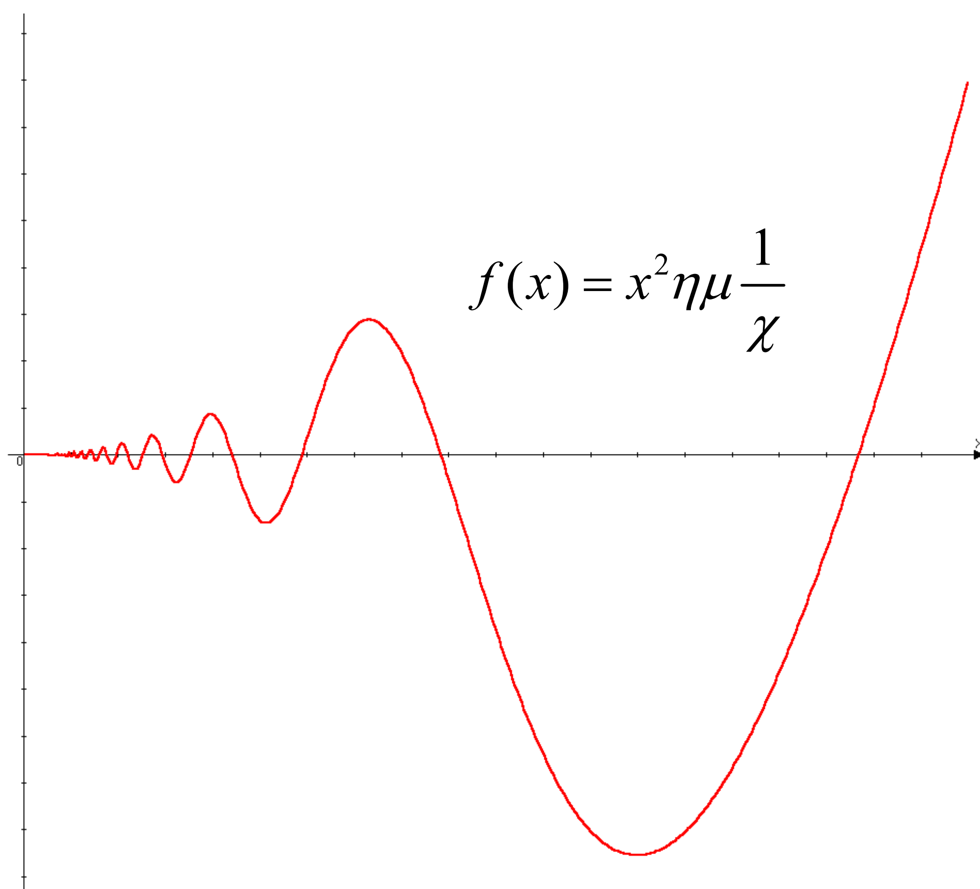
Επίσης στο 0 είναι συνεχής, αφού $f(0)=\lim_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0$ ως γινόμενο απειροστής επί φραγμένη. ‘Όμως το $f(0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο, αφού οσοδήποτε κοντά στο 0, σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,x]$ η *f(x)* εναλλάσσει

πρόσημο, δηλαδή γίνεται και θετική και αρνητική, συνεπώς η τιμή 0 δεν μπορεί να είναι τοπικό ακρότατο.

Ο παραπάνω ισχυρισμός καθίσταται φανερός, αν θεωρήσω την ακολουθία $x_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$ και $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της σύγκλισης της ακολουθίας, έπεται, ότι σε κάθε διάστημα της μορφής $(0,\varepsilon)$, υπάρχουν άπειροι όροι της και οι τιμές της συνάρτησης γι αυτές τις άπειρες τιμές είναι $f(x_n) = x_n^2 \cdot 1 = x_n^2 > 0$.

Αν θεωρήσω $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} \to 0$ και $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε και αυτή σε διάστημα $(0,\varepsilon)$, έχει άπειρους όρους της και οι τιμές της συνάρτησης γι αυτούς τους όρους είναι $f(y_n) = y_n^2(-1) = -y_n^2 < 0$.

Δηλαδή, οσοδήποτε κοντά στο 0, έχω και θετικές τιμές και αρνητικές τιμές, άρα στο 0 δεν μπορεί να έχω ακρότατο



11.2. ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

1. Το Θεώρημα του Fermat , έχει την εξής διατύπωση: «Έστω α<β , $x_0 \in (a,\beta)$ **,** $f:(a,\beta)\to\mathbb{R}$ **παραγωγίσιμη στο** x_0 **και** x_0 **τοπικό ακρότατο της f . Τότε,** $f'(x_0)=0$**».**

Να αποδείξετε (με ισάριθμα ξεχωριστά αντιπαραδείγματα) ότι οι τρεις υποθέσεις του θεωρήματος , δηλ.:

i. Η f ορίζεται σε ανοικτό (α,β)

ii. Το x_0 **τοπικό ακρότατο της f .**

iii. Η f παραγωγίσιμη στο (α,β)

είναι απαραίτητες έτσι ώστε να ισχύει το συμπέρασμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Για την αναγκαιότητα της υπόθεσης (i):

θεωρώ την $f:[0,1]\to[0,1]$ με $f(x)=x$. Αυτή:

1) Είναι ορισμένη στο κλειστό [0,1] (αντί του ανοικτού που προβλέπει η υπόθεση (i)).
2) Το $0\in[0,1]$ είναι θέση ελαχίστου.
3) Η f είναι παραγωγίσιμη στο [0,1].

Όμως δεν υπάρχει $x_0\in[0,1]: f'(x_0)=0$, αφού $f'(x)=1\neq 0\ \forall x\in[0,1]$.

β) Για την αναγκαιότητα της υπόθεσης (ii) :

θεωρώ την $f:(1,2)\to(1,4)$ με $f(x)=x^2$. Αυτή:

1) Είναι ορισμένη στο ανοικτό (1,2).
2) Στο (1,2) δεν έχω θέση ακροτάτου (αντί της ύπαρξης ακροτάτου που προβλέπει η υπόθεση (ii)).
3) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1,2).

Όμως δεν υπάρχει $x_0\in(1,2): f'(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0$ απορρίπτεται,

αφού $0\notin(1,2)$.

γ) Για την αναγκαιότητα της υπόθεσης (iii):

θεωρώ την $f:(-1,1)\to$ Ñ με

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in(-1,0)\\ -1, & x=0\\ x, & x\in(0,1)\end{cases}$$. Αυτή:

1) Είναι ορισμένη στο ανοικτό (-1,1).

2) Στο $0 \in (-1,1)$ έχω θέση τοπικού ακροτάτου (ελαχίστου εδώ).

3) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,1) πλην της θέσεως 0, όπου έχω ασυνέχεια (και άρα και μη παραγωγίσιμη , όπως προβλέπει η υπόθεση (iii)).

Όμως δεν υπάρχει $x_0 \in (-1,1): f'(x_0) = 0$, αφού $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (-1,1) - \{0\}$,

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι όταν δεν εκπληρούται έστω και μία από τις τρεις προϋποθέσεις του Θ.Fermat είναι δυνατόν να μην ισχύει το συμπέρασμά του.

2. Να αποδειχθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του Θ. Fermat. Δηλαδή, ο μηδενισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, είναι μια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακροτάτου στο σημείο, αλλά δεν είναι ικανή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την f : Ñ $\to$ Ñ με $f(x) = x^3$. Έχω $f'(x) = 3x^2$ και $f'(0) = 0$, όμως στο 0 δεν έχω ακρότατο, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$

Ενδέχεται ακόμη, να μην υπάρχει καθόλου η παράγωγος σε ένα σημείο και να είναι θέση ακροτάτου . π.χ. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$, έχει ελάχιστο στο x=0 αλλά $\nexists\, f'(0)$

ΣΧΟΛΙΟ: *Ένα πρακτικό συμπέρασμα που συνάγεται από αυτό, είναι ότι όταν σε κάποιο σημείο x_0 έχω $f'(x_0) \neq 0$, τότε στο x_0 δεν έχω ακρότατο.*

Ουσιαστικά, αυτό αποτελεί την αντιθετοαντίστροφη πρόταση του Θ.Fermat, δεδομένου όμως ότι ισχύουν οι άλλες δύο προϋποθέσεις του, δηλαδή η f ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα.

Θα διευκρινίσουμε περισσότερο το θέμα με στοιχειώδη προτασιακή λογική.

Το Θ.Fermat έχει μορφή $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \Rightarrow q$, όπου p_1, p_2, p_3 οι τρεις προϋποθέσεις του και q ότι «Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta): f'(x_0) = 0$.»

Η ισοδύναμη αντιθετοαντίστροφη πρόταση έχει τη μορφή: $\neg q \Rightarrow \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$.

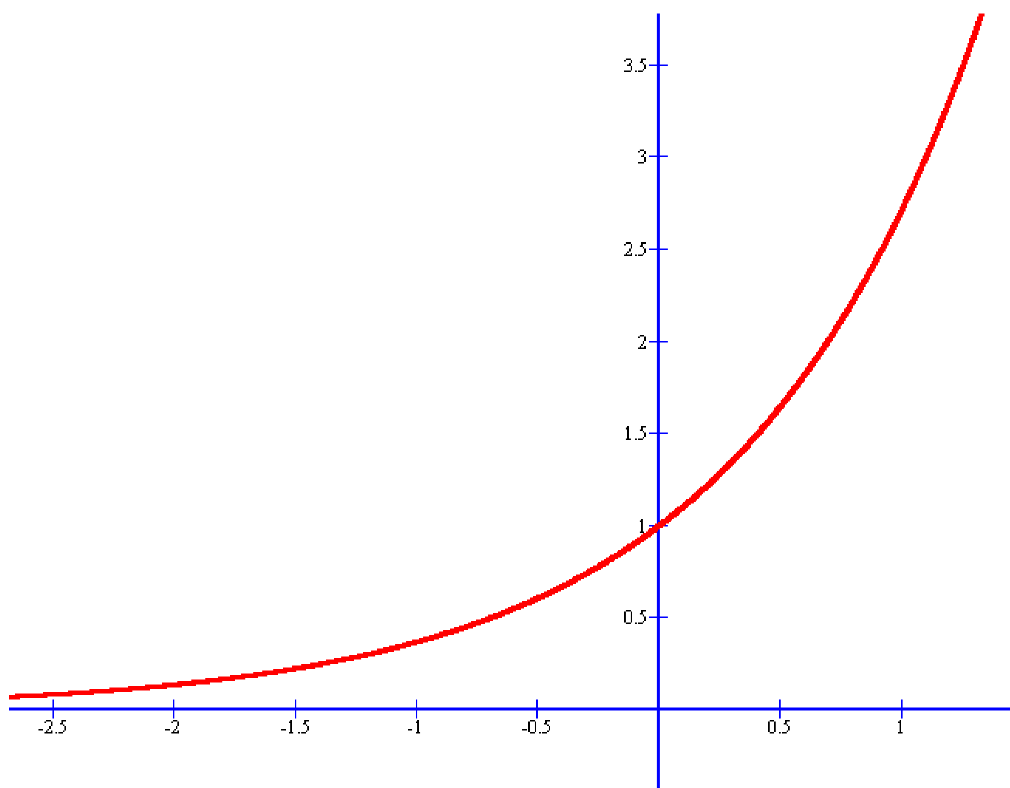
Επειδή όμως η σύζευξη τριών προτάσεων είναι ψευδής εάν και μόνο εάν μία τουλάχιστον από τις τρεις είναι ψευδής, τότε $\neg p \Rightarrow \neg p_3$, εάν οι p_1, p_2 είναι αληθείς.

12. ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

12.1. ΟΡΙΣΜΟΙ , ΚΟΙΛΕΣ –ΚΥΡΤΕΣ , ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ.

1. Στην Αμερικάνικη βιβλιογραφία, οι γραμμές που δεν είναι ευθείες χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Σε αυτές που «κρατούν το νερό» (hold the water) και σε αυτές που «χύνουν το νερό» (spill the water). Κατά πόσον είναι επιτυχημένη αυτή η ονομασία σε σχέση με τον μαθηματικό διαχωρισμό «κοίλες» και «κυρτές»;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν η διεύθυνση της κατακόρυφου και άρα και της διεύθυνσης της βαρύτητας αντιστοιχεί στο σύνηθες πρότυπο του άξονα yy', τότε είναι δυνατόν μία καμπύλη να είναι κυρτή και να μην «μην κρατά το νερό», όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα:



Η εκθετική συνάρτηση $y=e^x$: Δεν συγκρατεί ούτε μια σταγόνα βροχής παρ ΄ότι χαρακτηρίζεται κυρτή.

Συνεπώς ο χαρακτηρισμός ως κοίλων ή κυρτών ανάλογα με τη «συγκράτηση του νερού» δεν μπορεί να θεωρηθεί άκρως επιτυχής.

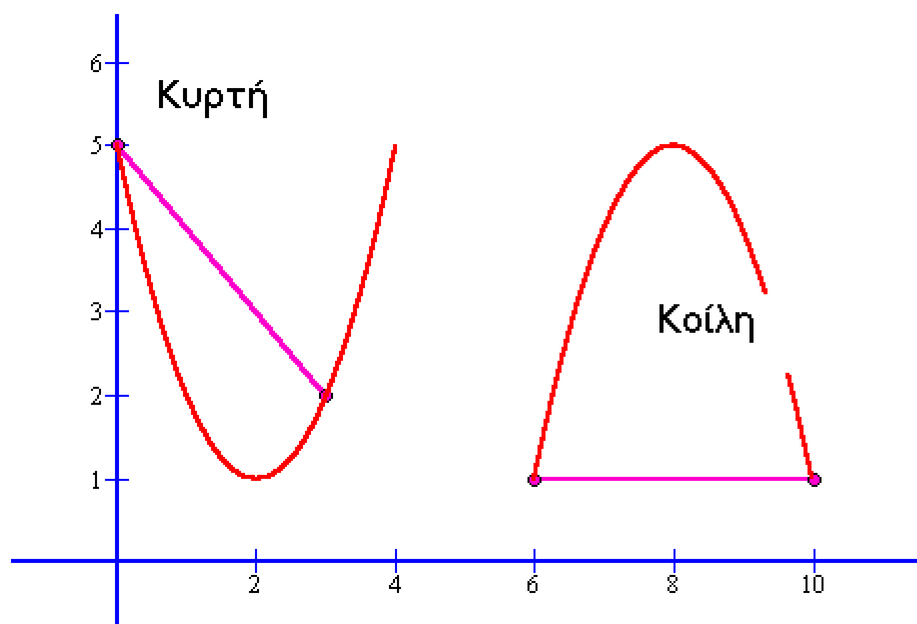
<u>ΣΧΟΛΙΟ</u>: Ένα πετυχημένο εποπτικό κριτήριο, είναι το εξής:

Ένα κινητό είναι «πάνω» στην καμπύλη και την διαγράφει από τα αριστερά προς τα δεξιά. Τότε:

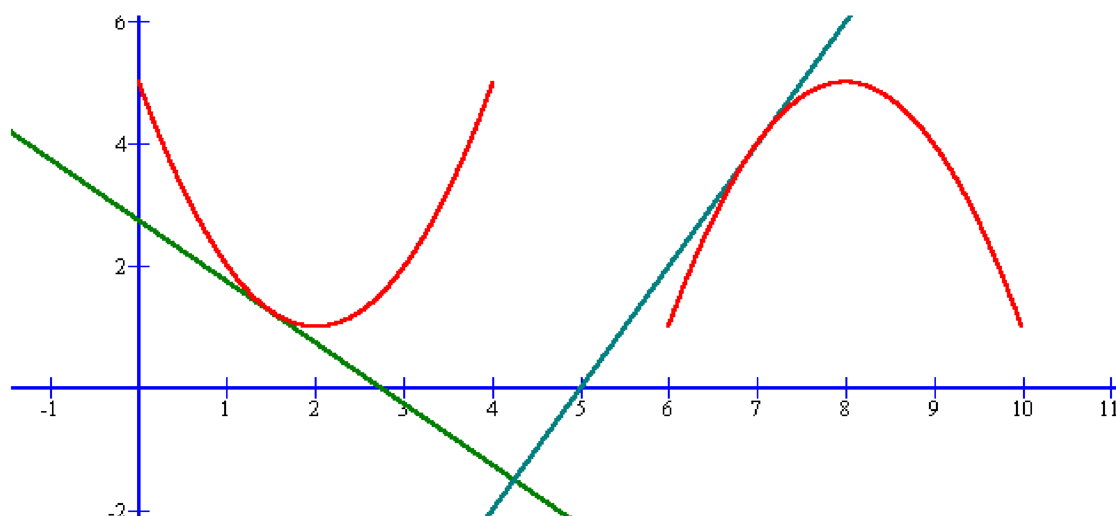
1. Αν στρέφεται κατά τη θετική φορά (αντίθετα δεικτών ωρολογίου), τότε έχω κυρτή γραμμή.
2. Αν στρέφεται κατά την αρνητική φορά (των δεικτών), τότε έχω κοίλη γραμμή.

Βεβαίως υπάρχουν και άλλα εξίσου πετυχημένα εποπτικά κριτήρια, κατάλληλα για την εισαγωγική διδασκαλία της έννοιας:

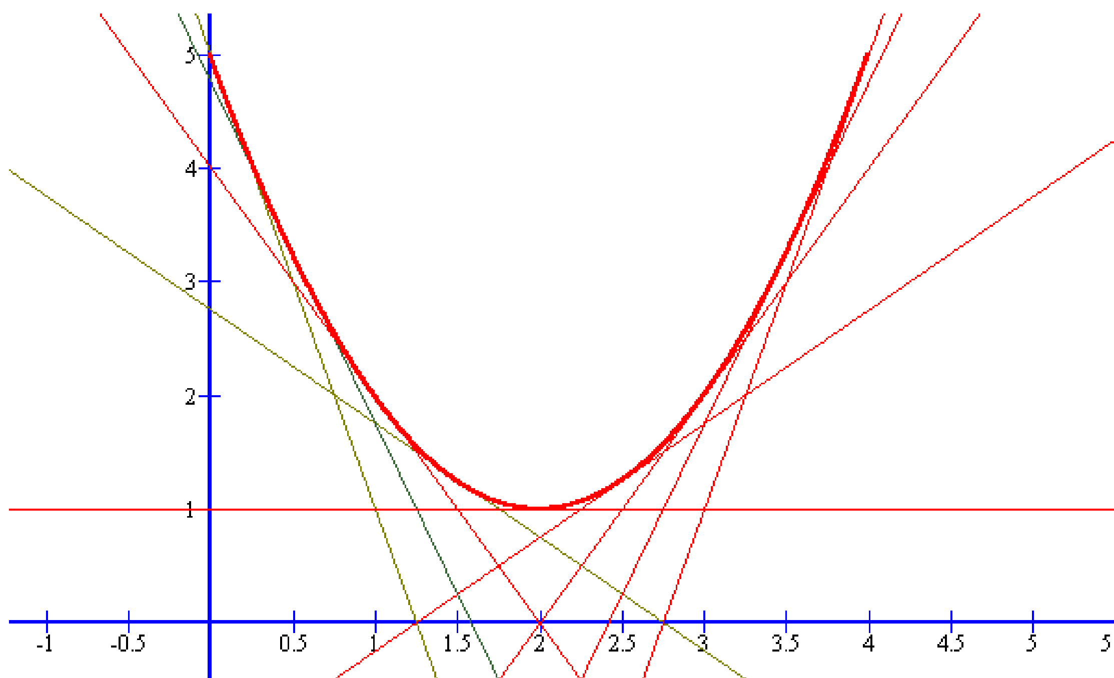
α) Στην κυρτή, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία της, αφήνει το «τόξο» που αποκόπτει προ τα «κάτω» (αντιθέτως η κοίλη)



β) Στην κυρτή, αν φέρω εφαπτομένη σε οιοδήποτε σημείο της, όλα τα σημεία της κείνται «πάνω» από την εφαπτομένη. Αντίθετα για την κοίλη.

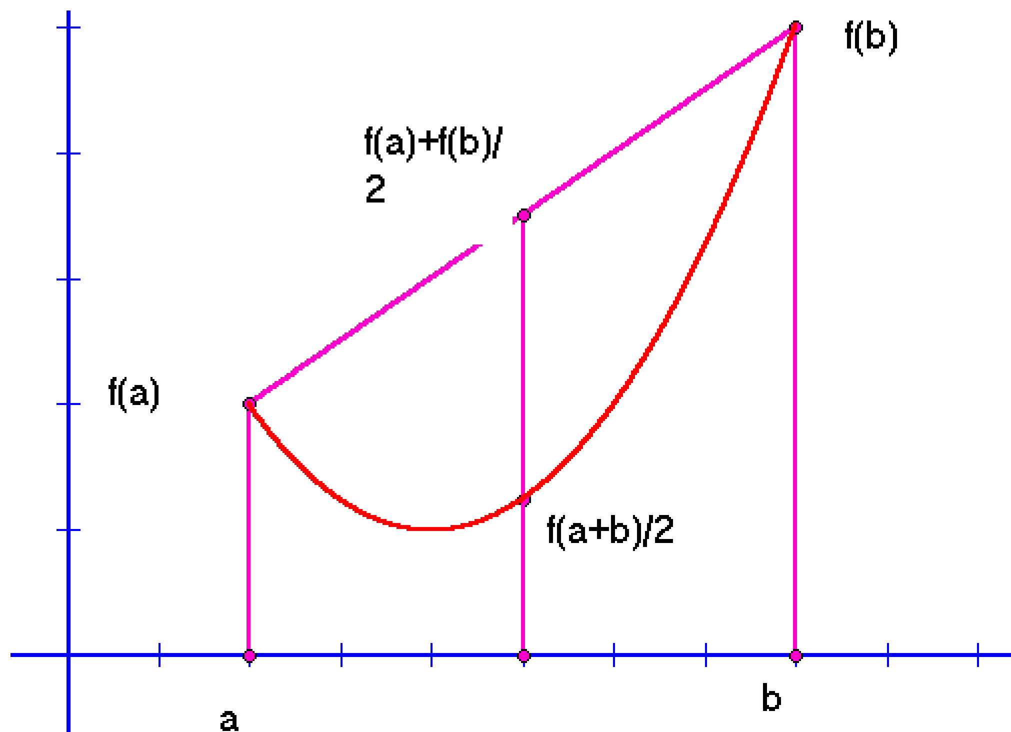


γ) Στην κυρτή, οι κλίσεις των εφαπτομένων σε κάθε σημείο της, αυξάνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Αντίθετα ισχύει για την κοίλη.



δ) Η προηγούμενη εποπτεία είναι η γέφυρα για την κατανόηση της πρότασης ότι «Μια συνάρτηση f ονομάζεται κυρτή, όταν η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα». (Αναλόγως και για την κοίλη).

ε) Αν f κυρτή συνάρτηση, τότε για κάθε δύο σημεία του Π.Ο. της α, β έχω: $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ (και αναλόγως για την κοίλη), που εκφράζει τις γνωστές ανισότητες του Jensen.



2. Να δοθούν παραδείγματα συναρτήσεων *f*, *g*, *h* ορισμένες στο Ñ, οι οποίες:

(i) Η f να είναι κυρτή.

(ii) Η g να είναι κοίλη.

(iii) Η h να είναι σε υποσύνολο του Ñ κοίλη και σε άλλο υποσύνολο κυρτή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) f : Ñ → Ñ με $f(x)=x^2-5x+6$ είναι κυρτή, διότι $f''(x)=2>0$ $\forall x \in$ Ñ.

(ii) g : Ñ → Ñ με $g(x)=-x^2-5x+6$ είναι κοίλη, διότι $f''(x)=-2<0$ $\forall x \in$ Ñ.

(iii) h : Ñ → Ñ με $h(x)=x^3-2x^2-x+7$. Κατά τα γνωστά, η h στο $(-\infty,\frac{2}{3})$ είναι κοίλη και στο $(\frac{2}{3},+\infty)$ κυρτή.

3. Να εξετασθεί, αν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης: «Αν η *f* παραγωγίσιμη σε διάστημα *Δ*, $a,\beta \in \Delta$ και $\alpha<\beta$, τότε : (f κυρτή $\Rightarrow f'(a)<f'(\beta)$).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η αντίστροφη πρόταση είναι η εξής: «Αν η *f* παραγωγίσιμη σε διάστημα *Δ*, $a, \beta \in \Delta$ και $\alpha < \beta$ και $f'(a) < f'(\beta)$, τότε η f κυρτή.

Δεν ισχύει, διότι αν θεωρήσω $f : [0, 3\pi] \to$ Ñ με $f(x) = \eta\mu x$, τότε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$,

$\frac{\pi}{2} < \frac{13\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{2} \in [0, 3\pi]$ και $0 = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < f'\left(\frac{13\pi}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, όμως η f δεν είναι κυρτή (προφανώς) στο [0,3*π*].

4. Είναι γνωστή η ισχύς της προτάσεως: «Αν $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \Delta$, τότε η f γνησίως κυρτή στο διάστημα *Δ*».
Να αποδειχθεί ότι δεν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όταν η f είναι γνησίως κυρτή σε διάστημα *Δ*, τότε δεν έπεται πάντα ότι $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \Delta$.

Ως αντιπαράδειγμα παραθέτουμε $f :$ Ñ $\to$ Ñ με $f(x) = x^4$. Αυτή είναι γνησίως κυρτή στο R , ενώ $f''(x) = 12x^2 \geq 0$. (Αναλόγως και για γν. κοίλη).

ΣΧΟΛΙΟ: Η γενικότερη πρόταση που ισχύει είναι ότι: «Αν $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in \Delta$ και η ισότητα ισχύει μόνο για μεμονωμένα ή για άπειρα σημεία, αλλά όχι για όλα τα σημεία του *Δ*, τότε η f είναι κυρτή στο *Δ*.

5. Είναι δυνατόν ένα σημείο x_0 να είναι και να μην είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης f;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Προφανώς όχι, διότι άλλως έχουμε απόκλιση από τον νόμου της Αριστοτέλειας λογικής της «του τρίτου ή μέσου αποκλίσεως». Ένα σημείο x_0 ή είναι ή δεν είναι σημείο καμπής και τρίτο τι, δεν υπάρχει. Όμως, υπάρχει σύγχυση στην βιβλιογραφία, αφού υπάρχουν τουλάχιστον έξι ορισμοί για το σημείο καμπής **μη ισοδύναμοι όλοι μεταξύ** τους, εξ ων και η πηγή παρεξηγήσεων.

Αναφέρουμε έξι από εν χρήσει ορισμούς του σημείου καμπής:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (a,x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντιστρόφως και η γραφική της παράσταση έχει εφαπτομένη στο $(x_0,f(x_0))$, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράσταση της *f*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Έστω η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(a,\beta)\in \mathrm{D}(f)$ και $x_0\in(a,\beta)$. Λέμε, ότι η f παρουσιάζει καμπή $(x_0,f(x_0))$, αν η f είναι κυρτή στο (a,x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντίστροφα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: Έστω η $(x_0,f(x_0))$ της γραφικής παράσταση μιας συνάρτησης f που ορισμένη στο (α,β) και παραγωγίσιμη στο x_0, θα λέγεται σημείο καμπής, αν και μόνο η συνάρτηση είναι κυρτή στο (a,x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντιστρόφως.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4: Το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, είναι ένα σημείο όπου η κυρτότητα αλλάζει είδος. Επίσης, σε ένα σημείο καμπής είναι δυνατόν η β' παράγωγος να μην υπάρχει. Για παράδειγμα, μπορεί να απειρίζεται.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5: Ένας αριθμός x_0 λέγεται σημείο καμπής της f αν η εφαπτομένη στην γραφική παράστασή της στο $(x_0,f(x_0))$ διαπερνά την γραφική παράσταση. Αν δεν υπάρχει μία μόνο εφαπτομένη αλλά δύο ημιεφαπτομένες, πρέπει η μία τουλάχιστον, να διαπερνά την καμπύλη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6: Έστω συνάρτηση f που παραγωγίζεται στο διάστημα *Δ*. Θα λέμε ότι το x_0 είναι σημείο καμπής της f, τότε και μόνον τότε, όταν υπάρχουν διαστήματα $(x_0-\varepsilon,x_0)$ και $(x_0+\varepsilon,x_0)$, όπου στο ένα η f είναι κυρτή και στο άλλο κοίλη ή αντιστρόφως.

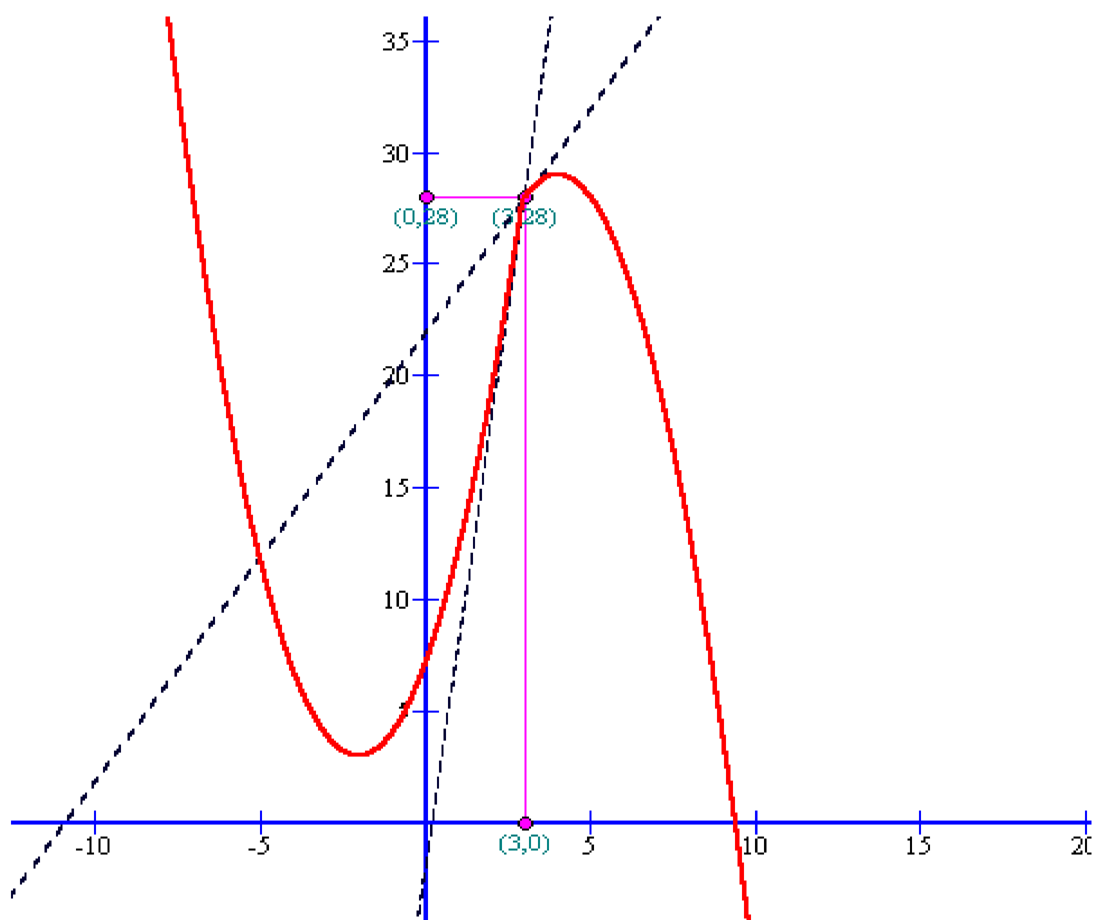
ΟΡΙΣΜΟΣ 7: Το σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ στο οποίο έχουμε:

- $\exists\, \varepsilon_1>0:[x_0-\varepsilon_1,x_0]\subset(\alpha,\beta)$ και η *f(x)* είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) στο $[x_0-\varepsilon_1,x_0]$
- $\exists\, \varepsilon_2>0:[x_0,x_0+\varepsilon_2]\subset(\alpha,\beta)$ και η *f(x)* είναι κοίλη (αντίστοιχα κυρτή) στο $[x_0,x_0+\varepsilon_2]$,

λέγεται σημείο καμπής της συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8: Έστω $(\alpha,\beta)\subseteq$ Ñ και $f:(\alpha,\beta)\to$ Ñ μία συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη. Το σημείο $(x, f(x_0))$ θα λέγεται σημείο καμπής της f, αν $f''(x_0)=0$ και $f''(x_0-h)\cdot f''(x_0+h)<0$ για $h\neq 0$, τέτοιο ώστε $x_0-h,\ x_0+h\in(\alpha,\beta)$.

Για παράδειγμα, αν έχω τη συνάρτηση: f : Ñ → Ñ με $f(x)=\begin{cases}3+(x+2)^2, & x<3\\ 29-(x-4)^2, & x\geq 3\end{cases}$ τότε στο σημείο $x_0=3$ δεν έχει εφαπτομένη, αφού $\nexists\, f'(3)$. Επειδή όμως υπάρχουν $f'_\alpha(3)=10$ και $f'_\delta(3)=2$ ορισμένοι συγγραφείς δέχονται ότι έχει δύο ημιεφαπτόμενες τις $y=10x-2$ και $y=2x+22$.

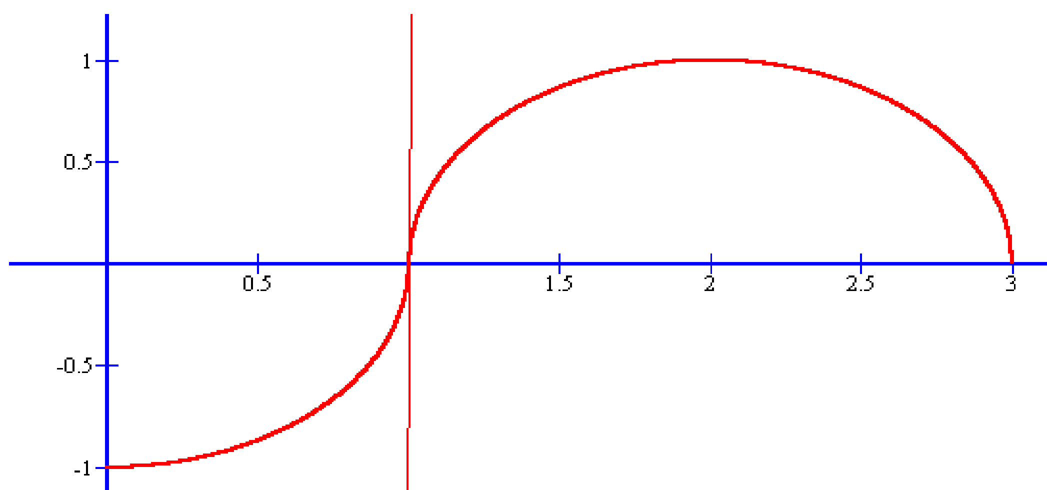


Στο σημείο $(3, f(3))$ αλλάζει κυρτότητα, από κυρτή γίνεται κοίλη, αλλά σημείο καμπής έχουμε μόνο σύμφωνα με τον ορισμό 5. Με όλους τους υπόλοιπους ορισμούς, δεν έχουμε σημείο καμπής.

- Αν έχω την $f:(0,3)\to$ Ñ με

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} -\sqrt{1-x^2}, & 0<x\le 1 \\ \sqrt{1-(x-2)^2}, & 1<x<3 \end{array}\right\} \text{ τότε}$$

$f'_{\alpha}(1)=+\infty$ και $f'_{\delta}(1)=+\infty$. Άρα στο 1, υπάρχει εφαπτομένη η ευθεία x=1.



Το σημείο (1,0) θεωρείται σημείο καμπής σύμφωνα με τους ορισμούς 1 και 5,

αλλά όχι με τους υπολοίπους.

Ενδιαφέρον έχει η απόκριση του σχεδιαστικού προγράμματος «Graph» στην εντολή να βρει την εφαπτομένη του διαγράμματος ενός κλάδου στο σημείο χ=1 Γράφει σε κατά λέξη μετάφραση : «Στο σημείο χ=1 η συνάρτηση $f(x)$ δεν ορίζεται» ενώ φυσικά και ορίζεται! Η εμφανιζόμενη εφαπτομένη είναι απλώς στο σημείο χ=0,999 με συντελεστή κλίσης 225.000 (!) Κάτι τέτοιες οριακές καταστάσεις θέλουν πολύ προσοχή όταν τις χειριζόμαστε με λογισμικά…………(Θα έπρεπε να γράφει $f'(x)$ αντί $f(x)$ για να είναι σωστό το μήνυμα.)

- Αν έχω την $f:$ Ñ $\to$ Ñ με $f(x)=2x^3+3x^2-12x$, τότε το σημείο $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ θεωρείται σημείο καμπής και με τους έξι ορισμούς.

- Για παράδειγμα, αν έχω τη συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^3+1, & x>1\\ 0, & -1\le x\le 1\\ (x+1)^3-1, & x<-1\end{cases},.$$

Τότε αυτή έχει σημείο καμπής μόνο με τον ορισμό 8 και με κανέναν άλλο. Και μάλιστα δεν έχει ένα μόνο σημείο καμπής, αλλά άπειρα υπεραριθμήσιμα και συγκεκριμένα όλα τα σημεία του διαστήματος $[-1,1]$.

Εδώ πρέπει να σχολιάσουμε, ότι το περιβόητο λανθασμένο ζήτημα των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2003 στα Μαθηματικά Α' δέσμης, σύμφωνα με αυτό τον ορισμό, μπορεί να θεωρηθεί ως σωστό. Με τον ορισμό όμως του διδακτικού βιβλίου είναι λανθασμένο, διότι οι εξετάσεις –υποτίθεται- ότι γίνονται σύμφωνα με τους ορισμούς των βιβλίων του ΟΕΔΒ.

Επίσης πρέπει να επισημανθεί, ότι οι θεωρήσεις μπορούν να αλλάζουν, ανάλογα και με τον ορισμό της κοίλης ή της κυρτής.

Οι περισσότεροι συγγραφείς διευκρινίζουν τη «γνήσια κυρτή» ή «γνήσια κοίλη», όπου οι γνωστές ανισοϊσώτητες των ορισμών ισχύουν μόνο ως ανισότητες. Ο αναγνώστης λοιπόν θα πρέπει να είναι προσεκτικός.

Να σημειωθεί ότι στα λυκειακά βιβλία του ΟΕΔΒ δίδεται ο ορισμός 1, τον οποίο δεχόμαστε και εμείς.

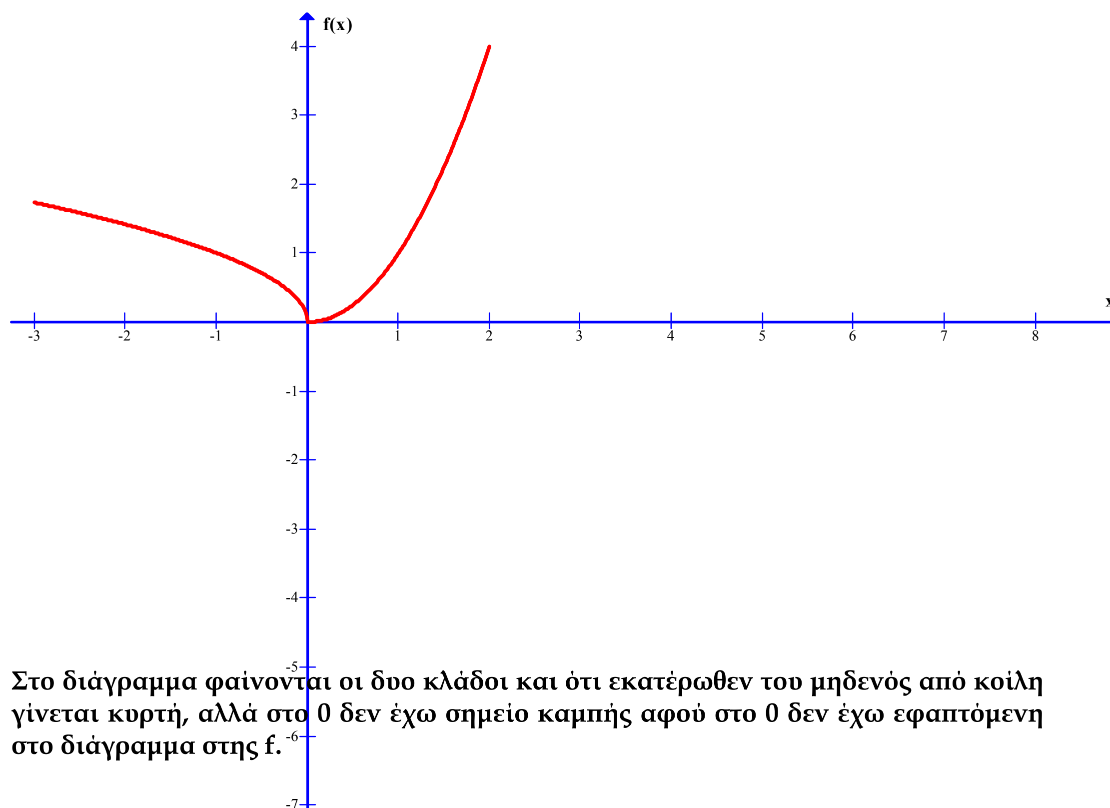
6. Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης, εκατέρωθεν σημείου x_0 της οποίας, να γίνεται αλλαγή κυρτότητας, αλλά στο x_0 να μην έχω σημείο καμπής .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την f : Ñ → Ñ με $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases}$.

Στο $x_0=0$ η κυρτότητα αλλάζει είδος, αφού $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x<0\\ 2, & x>0\end{cases}$ (δεν υπάρχει η $f''(0)$, αφού δεν υπάρχει και η $f'(0)$) και $f''(x)<0 \ \ \forall x<0$, ενώ $f''(x)>0 \ \ \forall x>0$.

Στο $x_0=0$ έχω $f'_{\alpha}(0)=-\infty$ και $f'_{\delta}(0)=0$.

Έτσι, στο $x_0 = 0$ δεν υπάρχει εφαπτομένη και επομένως το $x_0 = 0$ δεν είναι σημείο καμπής.



Στο διάγραμμα φαίνονται οι δυο κλάδοι και ότι εκατέρωθεν του μηδενός από κοίλη γίνεται κυρτή, αλλά στο 0 δεν έχω σημείο καμπής αφού στο 0 δεν έχω εφαπτόμενη στο διάγραμμα στης f.

Υπάρχει περίπτωση, εκατέρωθεν ενός σημείου x_0, μια συνάρτηση f να έχει αλλαγή κυρτότητας και x_0 να μην είναι σημείο καμπής διότι το $x_0 \notin D(f)$. Για παράδειγμα η $f(x) = \frac{1}{x} / \mathbb{R}^*$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ και $f''(x) > 0 \ \forall x > 0$, $f''(x) < 0 \ \forall x < 0$, ενώ δεν υπάρχει σημείο μηδενισμού της β' παραγώγου.

7. Να δοθούν παραδείγματα συναρτήσεων f, g, h $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

(i) Η f να μην έχει σημεία καμπής.

(ii) Η g να έχει ν σημεία καμπής.

(iii) Η h να έχει άπειρο και αριθμήσιμο πλήθος σημείων καμπής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) Η $f(x) = x^2$ δεν έχει σημείο καμπής.

(ii) Η g, η οποία έχει $g''(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$, όπου $x_1, x_2,\ldots,x_n$ τα n διακεκριμένα σημεία στα οποία η g παρουσιάζει σημεία καμπής. Η g υπολογίζεται με ολοκλήρωση δύο φορές απλά.

(iii)Η τριγωνομετρική $h(x)=\eta\mu x$ έχει άπειρα σημεία της μορφής $x=\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ που είναι άπειρα και αριθμήσιμα και είναι θέσεις σημείων καμπής, της μορφής $(\kappa\pi,0),\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

8. Να αποδειχθεί , ότι για να είναι κυρτή ή κοίλη μια συνάρτηση, δεν είναι απαραίτητο να είναι παραγωγίσιμη

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x)=|x|$, τότε σύμφωνα με τον ορισμό είναι κυρτή, αλλά-ως γνωστόν – δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Αν θεωρήσουμε την $g(x)=-|x|$ έχομε το αντίστοιχο παράδειγμα για κοίλη συνάρτηση που δεν είναι παραγωγίσιμη. $g(x)=-|x|$

12.2 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$, αλλά η $f(x)$ να μην έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu^2 x\,/\,\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}=$

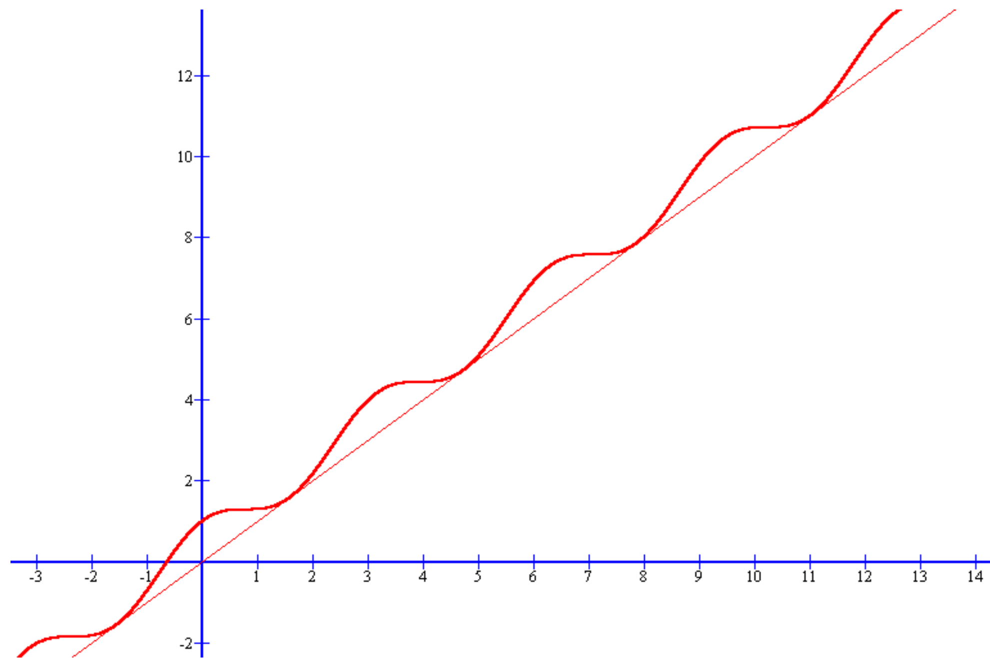
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{x}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2x}$$

$$=1+0+0=1$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x$. Το τελευταίο όριο δεν υπάρχει, διότι αν θεωρήσω $x_n=2n\pi\to+\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 2n\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}1^2=1$,

ενώ αν

$y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to+\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma\upsilon\nu^2 y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$.



Η γραφική παράσταση της

$f(x) = x + συν^2 x$ **εφάπτεται συνεχώς στην ευθεία y=x , αλλά ποτέ η μεταξύ τους απόσταση δεν τείνει στο 0**

2. Είναι δυνατόν ασύμπτωτη καμπύλης να τέμνει την καμπύλη;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Πρόκειται για ενδιαφέρον παιδαγωγικό (και μαθηματικό) ερώτημα, καθώς η ετυμολογική σημασία της λέξης «ασύμπτωτη» παραπέμπει ευθέως στην «μη σύμπτωση» και (κατά τη συνήθη ερμηνεία) στο ότι «δεν έχουν κοινά σημεία».

Από την άλλη, η μαθηματική σημασία του όρου, δεν αποκλείει την ύπαρξη κοινών σημείων, αλλά και αυτό δεν είναι προφανές αν γίνει μια όχι σωστή γεωμετρική μετάφραση του ορισμού (πράγμα λίαν σύνηθες).

Ο ορισμός της πλάγιας ασύμπτωτης, απαιτεί ύπαρξη $\lambda, \mu \in$ Ñ έτσι ώστε

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \lambda x + \mu \right] = 0 .$$

(1)

Η συνήθης λανθασμένη γεωμετρική θεώρηση του ορισμού έγκειται στην εξής μετάφραση: « Η (1) σημαίνει ότι η $f(x)$ και η ευθεία $y = \lambda x + \mu$ εφάπτονται στο άπειρο ή πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά χωρίς να συμπίπτουν ποτέ».

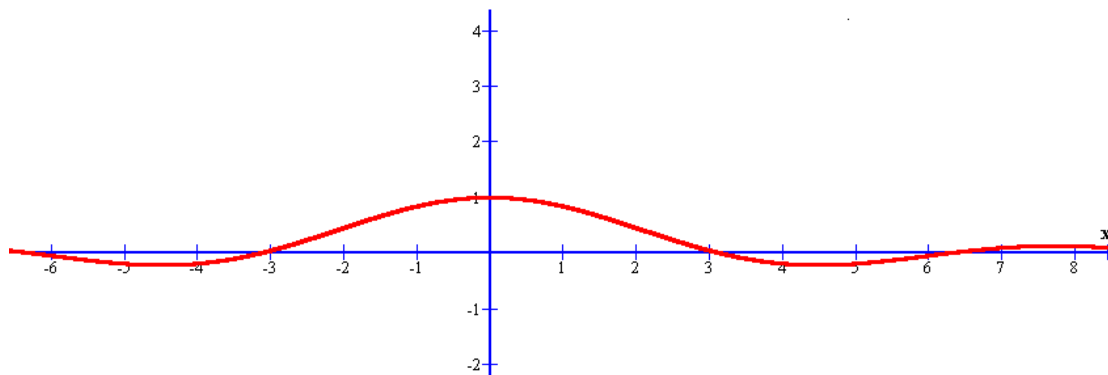
Η παραπάνω θεώρηση είναι σωστή για την συντριπτική πλειονότητα των **χρησιμοποιούμενων** παραδειγμάτων ή περιπτώσεων, **αλλά όχι και για όλα.**

Παραθέτουμε το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{Bmatrix}$$ η οποία είναι συνεχής.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=0$, πράγμα που σημαίνει ότι η ευθεία y=0 (δηλαδή ο άξονας xx') είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $f(x)$.

Όμως η $f(x)$ και ο άξονας xx' έχουν άπειρα (αριθμήσιμα) κοινά σημεία, αφού η εξίσωση $\dfrac{\eta\mu x}{x}=0 \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=0 \Leftrightarrow (x=\kappa\pi,\ \kappa\in Ñ)$ και έτσι φαίνεται η απειρία των κοινών σημείων.



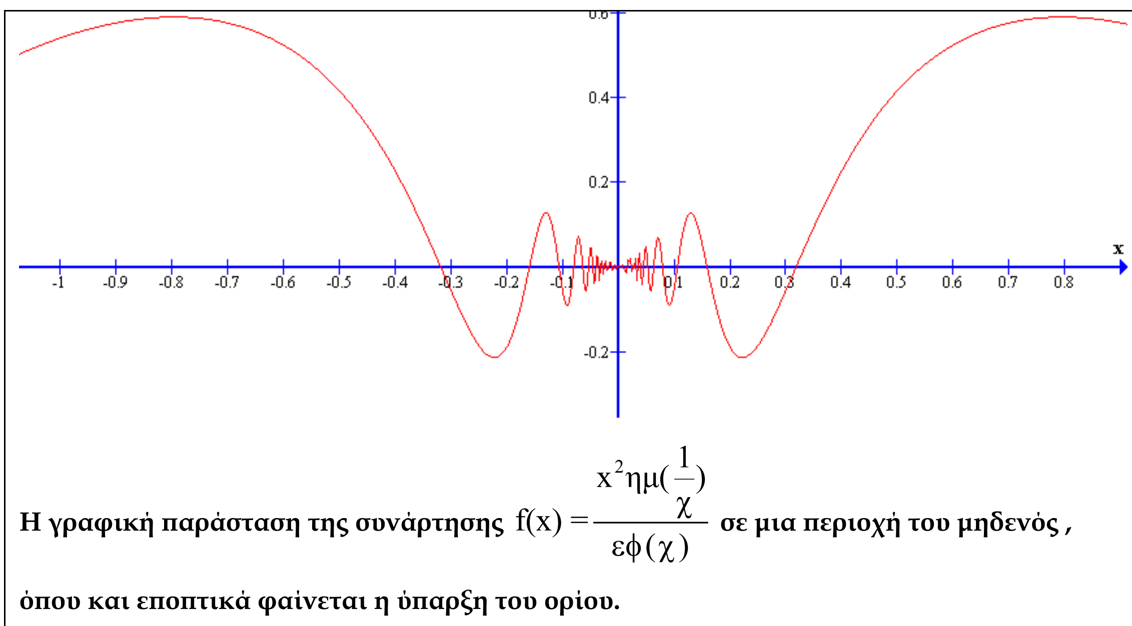
Η συνάρτηση f(x)=$\dfrac{\eta\mu(\chi)}{\chi}$ έχει την μορφή μιας αποσβενυόμενης φθίνουσας ταλάντωσης και προς το $+\infty$ και προς το $-\infty$

12.3. ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L'HOSPITAL

1. Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να μην υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **και να υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$**.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}$ είναι της μορφής $\dfrac{0}{0}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\varepsilon\varphi x}{x}}=\dfrac{0}{1}=0$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2\eta\mu(\frac{1}{\chi})}{\varepsilon\phi(\chi)}$ **σε μια περιοχή του μηδενός , όπου και εποπτικά φαίνεται η ύπαρξη του ορίου.**

Όμως,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)'}{(\varepsilon\varphi x)'}=\lim_{x\to 0}\cdot\frac{2x\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=0-\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

και το όριο αυτό δεν υπάρχει.

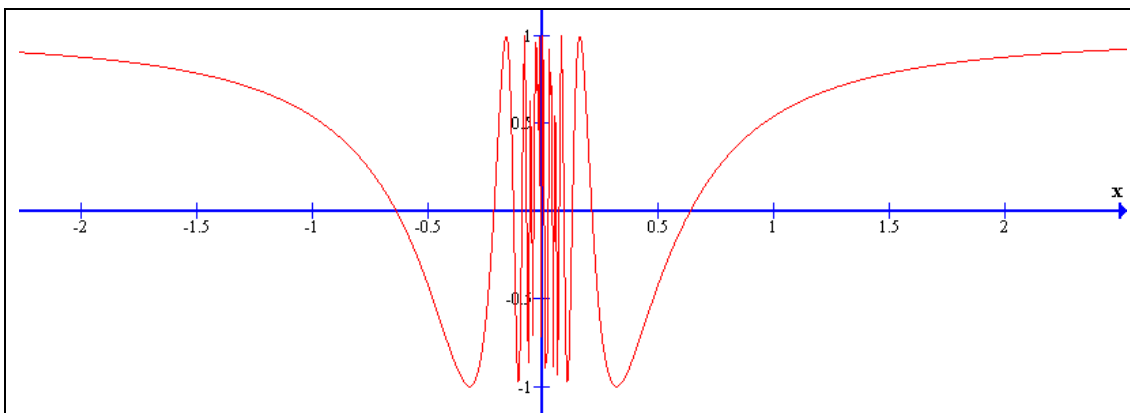
Πράγματι,

αν $x_n=\dfrac{1}{2\pi n}\to 0$ και $x_n\neq 0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$,τότε $\lim\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x_n}=\lim\sigma\upsilon\nu 2\pi n=1\to 1$.

Αν $x_n'=\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}\to 0$ και $x_n'\neq 0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, τότε

$$\lim\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x_n'}=\lim\sigma\upsilon\nu\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=\ 0\to 0.$$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο του $\text{συν}\frac{1}{x}$ όταν $x \to 0$.



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=συν(1/χ). **Εποπτικά έχουμε μια γραμμή που ταλαντώνεται μεταξύ του 1- και 1 όσο πλησιάζουμε στο 0 , χωρίς όμως να σταθεροποιείται σε κάποια συγκεκριμένη τιμή.**

ΣΧΟΛΙΟ: Το παράδειγμα αναδεικνύει το ικανό και όχι το αναγκαίο του κανόνα L'Hopsital. Επομένως, όταν δεν υπάρχει η οριακή τιμή του λόγου των παραγώγων, δεν έπεται ότι δεν υπάρχει και το αρχικό προς υπολογισμό όριο.

2. Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα να αποδειχθεί το ψεύδος της παρακάτω προτάσεως:

«Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες και $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ **τότε και** $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$**».**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$.

Τότε, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x+1} = \frac{0}{1} = 0$ και $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1} = 1 \neq 0$.

Επομένως η πρόταση είναι ψευδής. Όπως δείξαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, αληθής γενικά είναι η αντίστροφη πρόταση.

3. Να δοθεί παράδειγμα υπολογισμού ορίου, το οποίο για τον υπολογισμό του να χρειάζεται *κ* φορές την διαδοχική εφαρμογή του κανόνα L'Hospital.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε ότι το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\kappa}\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ $\kappa \in$ Í, το οποίο με κ διαδοχικές παραγωγίσιμες, δίνει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^\kappa\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(\kappa x^{\kappa-1}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(\kappa(\kappa-1)x^{\kappa-2}\right)'}=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\kappa}=+\infty .$$

Άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\kappa}=+\infty$.

Σε περίπτωση όπου $0<\kappa\notin$ Í ,τότε $\exists n\notin$ Í $: n-1<\kappa<n$.

Τότε, με τα από *n* διαδοχικές παραγωγίσιμες, έχω:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\kappa}=\lim\frac{e^x}{\kappa(\kappa-1)(\kappa-2)...(\kappa-n+1)x^{\kappa-n}}$$

(1)

Τότε $\kappa-n<0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\kappa-n}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{n-\kappa}=+\infty$. Άρα το όριο της (1) ισούται με $+\infty$.

4. Μία διατύπωση ενός κανόνα του L'Hospital, είναι η εξής:

«Αν οι συναρτήσεις *f*, *g*:

(i) Είναι συνεχείς στο $\left[x_0-h,x_0+h\right], h>0$

(ii) Είναι παραγωγίσιμες στο $\left[x_0-h,x_0+h\right]-\{x_0\}$

(iii) $f(x_0)=g(x_0)=0$

(iv) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{g(x)}=\lambda\in$ Ñ **,**

Τότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$ **».**

Η συνθήκη (iv) υποκρύπτει την επί πλέον υπόθεση, ότι $\exists\varepsilon>0: g'(x)\neq0$ $\forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)-\{x_0\}$**, αφού άλλως δεν υπάρχει το όριο. Αυτή η υπόθεση είναι απολύτως ουσιώδης και βασική για να ισχύει το συμπέρασμα.**

Να αποδειχθεί το βάσιμο του τελευταίου ισχυρισμού με κατάλληλο παράδειγμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=e^{-\frac{2}{x}}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+2\eta\mu\frac{1}{x}\right] \text{ και } g(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+\eta\mu\frac{1}{x}\right] \quad \forall x\in(0,+\infty) \text{ και}$$

$f_{(0)}=g_{(0)}=0$.

Οι προϋποθέσεις και το συμπέρασμα ισχύουν και όταν θεωρήσουμε τις f, g σε διάστημα της μορφής $[0,+\infty)$. Σε αυτή την περίπτωση τα διαστήματα του θεωρήματος L' Hospital γίνονται $[x_0, x_0+h]$ για την συνέχεια και $(x_0, x_0+h]$ για την παραγωγισιμότητα.

Πράγματι, $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{2}{x}}\cdot\left[\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+2\eta\mu\frac{1}{x}\right]=0=f_{(0)}$, ως γινόμενο απειροστής επί

φραγμένη, όπως ομοίως και $\lim\limits_{x\to 0}=e^{-\frac{1}{x}}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+\eta\mu\frac{1}{x}\right]=0=g_{(0)}$ και επομένως

οι f, g είναι συνεχείς το 0.

Για τις παραγώγους τους έχω:

$$f'(x)=\frac{5}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}\eta\mu\frac{1}{x}, \quad g'(x)=\frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Όμως, οσοδήποτε μικρή γειτονιά του 0, η $g(x)$ μηδενίζεται για άπειρες τιμές.

Αυτό φαίνεται αν θεωρήσω την ακολουθία $x_n=\frac{1}{2\pi n}\to 0$.

Τότε $g(x_n)=0\ \forall n\in$ Í (αφού $\eta\mu\frac{1}{x_n}=\eta\mu 2\pi n=0\ \forall n\in$ Í και σε κάθε περιοχή

του 0, βρίσκονται άπειροι όροι της $x_n : g'(x_n)=0$.

Τότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{x}}=0,$$

όταν $\eta\mu\frac{1}{x}\neq 0$.

Όμως, το πηλίκο $\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2\text{εφ}\frac{1}{x}}{1+\text{εφ}\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left[1+\frac{1}{1+\text{σφ}\frac{1}{x}}\right]$ δεν έχει όριο στο

$x_0 = 0$, αφού αν θεωρήσω την ακολουθία $x_n = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}} \to 0$, τότε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \left[1+\frac{1}{1+1} = 0\right].$$

Όμως αν θεωρήσω την $x_n^{'} = \frac{1}{2\pi n+\frac{3\pi}{2}} \to 0$ και

$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n^{'})}{g(x_n^{'})} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\left(2\pi n+\frac{3\pi}{2}\right)} \cdot \left[1+\frac{1}{1-1}\right]$ δεν έχει νόημα, αφού η αγκύλη δεν έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, απλοποιήσαμε τον παράγοντα $\text{ημ}\frac{1}{x}$**, χωρίς να λάβουμε υπ' όψιν μας, ότι υπάρχουν τιμές του x, οσοδήποτε κοντά στο 0 που τον μηδενίζουν, καταλήγοντας σε λάθος.**

Το αντίστοιχο παράδειγμα, όταν $x \to +\infty$ είναι όταν ζητάμε να υπολογίσουμε το παρακάτω όριο:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}(\text{συν}x+2\text{ημ}x)}{e^{-x}(\text{συν}x+\text{ημ}x)}$. Είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ και δεν υπάρχει. Πράγματι, αν διαιρέσω με $\text{συν}x \neq 0$, τότε έχω $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\frac{1+2\text{εφ}x}{1+\text{εφ}x}$.

Αν θεωρήσω $x_n = \pi n$, τότε $x_n \to +\infty$ και

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\pi} \cdot \frac{1+2\text{εφ}n\pi}{1+\text{εφ}n\pi} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n\pi} \cdot \frac{1+2\cdot 0}{1+0} = 0.$$

Αν όμως θεωρήσω $x_n^{'} = 2n\pi - \frac{\pi}{4} \to +\infty$ και

$\lim_{n\to+\infty} e^{-\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1+2\text{εφ}\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\text{εφ}\left(2n\pi-\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1-2}{1-1}$ που δεν έχει νόημα, αφού έχω 0 σε παρανομαστή.

5. Υπάρχει παράδειγμα ορίου της μορφής $\frac{0}{0}$ στο οποίο ο κανόνας του L'Hospital αποτυγχάνει, αφού επάγει σε εφαρμογή του άπειρες φορές, πράγμα αδύνατο. Εν τούτοις, με κατάλληλο μετασχηματισμό, μπορεί να υπολογισθεί εφαρμόζοντας τον κανόνα του L' Hospital πεπερασμένες φορές.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το παράδειγμα είναι το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\alpha \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$, $\alpha \in \text{Ñ}^*$, $n \in \text{Í}^*$.

Η λεπτομερής διαπραγμάτευση του γίνεται στην παρακάτω εφαρμογή.

6.Υπάρχει συνάρτηση $f : \text{Ñ} \to \text{Ñ}$ και $x_0 \in \text{Ñ}$, έτσι ώστε $f^{(n)}(x_0) = 0 \ \forall n \in \text{Í}$ και $f^{(n)}(x)$ μη σταθερές $\forall n \in \text{Í}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \left\{\begin{matrix} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{matrix}\right\}$ που είναι

γνωστή και ως **«συνάρτηση του Cauchy».** Γι' αυτήν, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \ \ f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0 .$$

$$f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \ \ f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 .$$

Θα δείξω ότι

$$f^{(n)}(x) = \left\{\begin{matrix} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{matrix}\right\}$$

(1)

όπου $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ πολυώνυμο βαθμού *3n* ως προς $\frac{1}{x}$.

Η (1) για n=1 ισχύει.

Υποθέτοντας, ότι ισχύει για n, θα δείξω ότι ισχύει και για n+1. Πράγματι:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = -\frac{1}{x^2}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}}\left[-\frac{1}{x^2}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right]$$

Η παράσταση εντός της αγκύλης, είναι άθροισμα πολυωνύμων βαθμών $3n+2$ και $3n+3$, δηλαδή τελικά πολυώνυμο βαθμού $3(n+1)$ ως προς $\frac{1}{x}$.

Θέτω

$$P_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right),\ x \neq 0.$$

Για x=0, έχω:

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0}P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

(Θέσαμε $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} = P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right)$).

Διότι, αν $\alpha_\kappa \cdot \frac{1}{x^\kappa}$ κάποιος όρος του πολυωνύμου $P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right)$, τότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\alpha_\kappa\frac{1}{x^\kappa}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,\ \alpha_\kappa \in Ñ.$$

Η εύρεση αυτού του ορίου γίνεται με εφαρμογή του κανόνα του L'Hospital κατά μη τετριμμένο τρόπο, ως εξής:

Το $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_\kappa \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\kappa}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, αλλά παρ' όλα αυτά, δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο κανόνας του L'Hospital, αφού οδηγεί σε αλλεπάλληλες μορφές $\frac{0}{0}$ επ' άπειρον πράγμα που καθιστά αδύνατο τον υπολογισμό του. Καταφεύγουμε στο εξής τέχνασμα:

$$\lim_{x\to 0}\alpha_\kappa\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\kappa} = \lim_{x\to 0}\alpha_\kappa\frac{\frac{1}{x^k}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\left(=\frac{+\infty}{+\infty}\text{ή}\frac{-\infty}{-\infty}\right).$$

‘Εχω +∞, όταν $x \to 0^+$ και -∞, όταν $x \to 0^-$ θέτουμε $\frac{1}{x} = y$. Τότε $x \to 0^+$, $y \to +\infty$ και

$$\lim_{y\to+\infty} \alpha_\kappa \frac{y^\kappa}{e^{y2}}\left(=\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \alpha_\kappa \frac{\kappa y^{\kappa-1}}{2ye^{y2}} = \lim_{x\to+\infty} \alpha_\kappa \frac{\kappa \cdot y^{\kappa-2}}{2e^{y2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a_\kappa \cdot \kappa \cdot (\kappa-2) y^{\kappa-3}}{2^2 ye^{y2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_\kappa \cdot \kappa \cdot (\kappa-2) y^{\kappa-4}}{2^2 \cdot e^{y2}}$$

(1)

με συνεχείς εφαρμογές του κανόνα του L’Hospital, στον αριθμητή της (1), έπειτα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων θα έχω 0 και στον παρανομαστή παράσταση $\neq 0$. Επομένως, το όριο είναι το $0, \forall \kappa \in \mathbb{N}$. Αναλόγως, όταν $x \to 0^-$, $y \to -\infty$, και $\lim_{y\to-\infty} \frac{y^\kappa}{e^{y2}} = 0$.

Επομένως, τελικά, όταν $x \to 0$

$$\lim \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\kappa} = 0.$$

Έτσι, ξαναγυρνώντας στην υπολογισμό της παραγώγου συναρτήσεως, έχω:

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} P_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

7. Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχείς παραγώγους οιασδήποτε τάξεως σε σημείο x_0, αλλά δεν αναπτύσσεται κατά Taylor.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Είναι η συνάρτηση Cauchy f $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, για την οποία όπως είδαμε πριν, ισχύει $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, οπότε αν θεωρήσουμε $x_0 = 0$, το ανάπτυγμα ταυτίζεται πάντα με το υπόλοιπο Taylor, δηλ. δεν υπάρχει ανάπτυγμα.

12.4. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΚΟΙΛΩΝ ΚΑΙ ΚΥΡΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1) $f(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Δεν είναι ούτε κυρτή, ούτε κοίλη.

2) $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$. Για $\alpha>0$ είναι κυρτή και για $\alpha<0$ είναι κοίλη.

3) $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ \gamma\neq 0,\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, $D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\delta}{\gamma}\right\}$.

(i) Αν $\alpha\delta-\beta\gamma<0$, τότε στο $\left(-\infty,-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$ η f κοίλη και στο $\left(-\dfrac{\delta}{\gamma},+\infty\right)$ κυρτή.

(ii) Αν $\alpha\delta-\beta\gamma>0$, τότε στο $\left(-\infty,-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$ η f κυρτή και στο $\left(-\dfrac{\delta}{\gamma},+\infty\right)$ κοίλη.

4) $f(x)=x^a,\ x\neq -1,\ x\neq 0,\ x\neq 1$. Για τις διάφορες τιμές του α:

(i) $x^{2n},\ n\in\mathbb{N},\ D(f)=\mathbb{R}$, είναι κυρτή παντού.

(ii) $x^{2n-1},\ n\in\mathbb{N}-\{1\},\ D(f)=\mathbb{R}$, στο $(-\infty,0)$ κοίλη, στο $(0,+\infty)$ κυρτή.

(iii) $x^{-2n},\ n\in\mathbb{N}^*,\ D(f)=\mathbb{R}^*$, στο $(-\infty,0)$ κυρτή, στο $(0,+\infty)$ κυρτή.

(iv) $x^{-2n-1},\ n\in\mathbb{N}^*,\ D(f)=\mathbb{R}^*$, στο $(-\infty,0)$ κοίλη, στο $(0,+\infty)$ κυρτή.

(v) $x^a,\ a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z},\ D(f)=(0,1)\cup(1,+\infty)$. Οπότε:

α) $\alpha<0$ ή $\alpha>1$ είναι κυρτή.

β) $0<\alpha<1$ είναι κοίλη.

5) $f(x)=\alpha^x,\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1,\ D(f)=\mathbb{R}$, είναι κυρτή παντού.

6) $f(x)=log_\alpha x,\ \alpha>0,\ \alpha\neq 1,\ D(f)=\mathbb{R}_+^*$

i) Αν $0<\alpha<1$ είναι κυρτή.

ii) Αν $\alpha>1$ είναι κοίλη.

7) $f(x)=\eta\mu x$.

Στα $(2\kappa\pi,2\kappa\pi+\pi)$ κοίλη, $(2\kappa\pi+\pi,2\kappa\pi+2\pi)$ κυρτή. $(\kappa\in\mathbb{Z})$

8) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Στα $\left(2\quad-\frac{}{2},2\quad+\frac{}{2}\right)$ κοίλη, $\left(2\quad+\frac{}{2},2\quad+\frac{3}{2}\right)$ κυρτή. $(\quad\in\wedge)$

9) .

Στα — κυρτή, — κοίλη. (□ □ □)

10) f(x) = □□x .

Στα — κυρτή, — κοίλη. (□ □ □)

11) Με τη χρήση της πρότασης, ότι: «Αν η f στο (α,β) είναι κυρτή, τότε η $-f$ είναι κοίλη και αντιστρόφως».

12) Αν η f στο (α,β) κυρτή, τότε η f - □ (□ □ □) στο ίδιο διάστημα θα είναι κυρτή και αντιστρόφως.

13) Αν η f στο (α,β) κυρτή, τότε η □□f - □ (□,□ □ □) στο ίδιο διάστημα θα είναι:

(i) , κυρτή και αντιστρόφως.

(ii) , κοίλη και αντιστρόφως.

14) Οι άρτιες συναρτήσεις, δεξιά και αριστερά του άξονα yy' έχουν το ίδιο είδος κυρτότητας.

15) Οι περιττές συναρτήσεις, στα συμμετρικά ως προς την αρχή γραφήματα και στα αντίστοιχα διαστήματα, έχουν διαφορετικό είδος κυρτότητας.

16) Οι περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο Τ, στα αντίστοιχα περιοδικά διαστήματα πλάτους Τ, διατηρούν την κυρτότητά τους.

17) Αν οι f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και κυρτές και αν επί πλέον η f είναι γνησίως αύξουσα, η $f_0 g$ είναι κυρτή.

18) 18) Αν $P(x)$ πολυώνυμο με θετικούς συντελεστές και άρτιους εκθέτες, τότε η συνάρτηση είναι παντού κοίλη.

19) Το πεπερασμένο κοίλων (κυρτών) συναρτήσεως σε διάστημα (α,β) είναι κοίλη (κυρτή).

20) Αν είναι θετικές με κοινό σημείο ελαχίστου, τότε το γινόμενο τους είναι συνάρτηση κοίλη.

12.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

1) Η f με $f(x) = x^n$ έχει σημείο καμπής μόνο στην περίπτωση όπου το n είναι περιττός με .

2) f(x) = □□x . Έχει σημεία καμπής τα (□□,0), □ □ □ .

3) . Έχει σημεία καμπής τα —.

4) f(x) = x. Έχει σημεία καμπής τα (,0), .

5) . Έχει σημεία καμπής τα —.

13. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN

13.1. Η ολοκλήρωση κατά Riemann

1. Να δοθεί παράδειγμα συναρτήσεως *f*, η οποία είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, φραγμένη και μη ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ως ένα τέτοιο παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε τον περιορισμό $\lambda \cdot x$ στο $[0,1]$ της γνωστής συνάρτησης του Dirichlet:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Ορίζεται στο $[0,1]$, είναι προφανώς φραγμένη. Για οποιαδήποτε διαμέριση του $[0,1]$ οσοδήποτε λεπτή και σε κάθε υποδιάστημα που δημιουργεί, θα υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι (λόγω της πυκνότητας και των ρητών και των αρρήτων στο Ñ).

Άρα, $\forall$ διαμέριση $P=\{x_0=0,x_1,x_2,...,x_n=1\}$ του $[0,1]$ θα έχω $L(P,f)=0$ και $U(P,f)=1$ ή $\int f(x)=0\neq\int f(x)=1$. Άρα η *f*, δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

2. Να βρεθεί συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ, με $f(x)\geq 0\ \forall x\in[\alpha,\beta]$, $f(x)$ μη μηδενική, για την οποία $\int_\alpha^\beta f(x)=0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε την $f:[0,1]\to$ Ñ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\{0,1\}\\ 0, & x\in(0,1)\end{cases}$ $\forall\varepsilon>0$

θεωρώ διαμέριση *P* λεπτότητας μικρότερης από $\frac{\varepsilon}{2}$. Τότε $U(P,f)<\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1+\frac{\varepsilon}{2}\cdot 1=\varepsilon$

$L(P,f)=0$ και $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$, δηλ. Η *f* είναι ολοκληρώσιμη με $\int_0^1 f(x)=0$.

3. Είναι γνωστό, ότι «Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι ολοκληρώσιμες και $f(x)\geq g(x)\quad \forall x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\geq\int_\alpha^\beta g(x)$».

Να εξετασθεί αν ισχύει ανάλογη πρόταση διάταξης και για τις παραγώγους των f,g σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

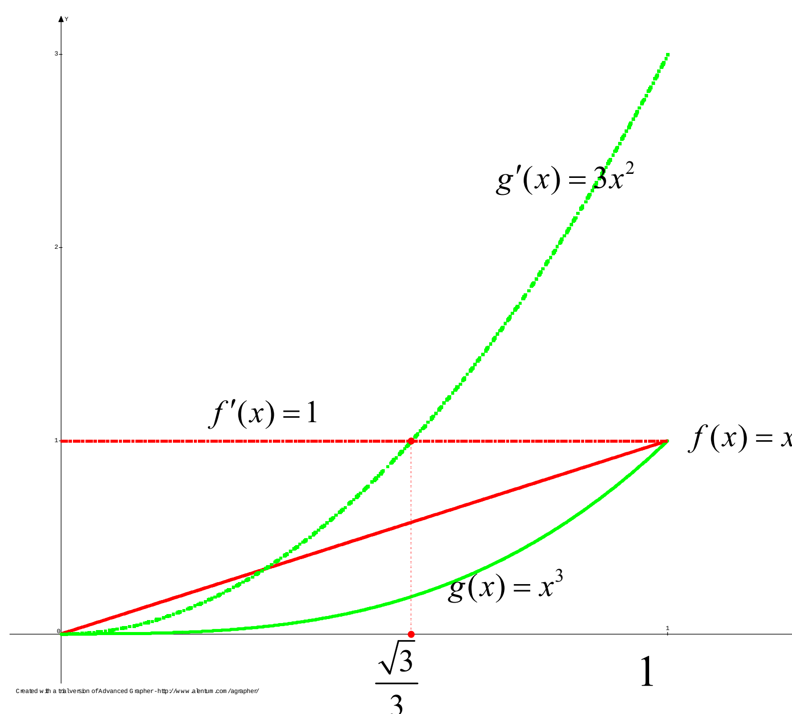
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Δεν ισχύει, όπως φαίνεται από τα πιο κάτω τρία παραδείγματα:

- Αν $f(x)=x\ /\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$ και $g(x)=x^3\ /\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$ τότε $f(x)\geq g(x)\ \forall x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$ (το ίσον ισχύει μόνο για τις ακραίες τιμές). Όμως,

$$f'(x)=1 \text{ και } g'(x)=3x^2 \text{ και } f'(x)=1\leq 3x^2=g'(x) \quad \forall x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right].$$

Δηλαδή, $f(x)\geq g(x) \Rightarrow f'(x)\leq g'(x) \quad \forall x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$.

- Για συναρτήσεις με την ίδια αναλυτική έκφραση όπως προηγουμένως αλλά ορισμένες στο $\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Έχω $x=f(x)\geq g(x)=x^3 \Rightarrow 1=f'(x)\geq g'(x)=3x^2$.



- Για τις $f(x)=5\ /[0,1]$ και $g(x)=3\ /[0,1]$ έχω $f(x)>g(x)\ \forall x\in[0,1]$ και $f'(x)=0=g'(x)\ \forall x\in[0,1]$.

Από τα προηγούμενα τρία παραδείγματα, καθίσταται φανερό, ότι δεν μπορεί να υπάρξει ανάλογη πρόταση διάταξης για τις παραγώγους, όπως και στα ολοκληρώματα.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Ισχύει η πρόταση, ότι «Αν $f:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη, τότε και η $|f|$ ολοκληρώσιμη».
Να αποδειχθεί ότι δεν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η αντίστροφη πρόταση έχει την εξής διατύπωση: «Αν $f:[\alpha,\beta]\to \mathbb{R}$ και η $|f|$ ολοκληρώσιμη, τότε και η f θα είναι ολοκληρώσιμη».

Για να αποδειχθεί η μη ισχύς της, πρέπει κι αρκεί να παραθέσουμε ένα αντιπαράδειγμα.

Πράγματι, αν θεωρήσω $f:\to \mathbb{R}$ με $f(x)=\left\{\begin{matrix} \lambda, & x\in[\alpha,\beta]\cap\mathbb{Q} \\ -\lambda, & x\in[\alpha,\beta]\setminus\mathbb{Q}\end{matrix}\right\}(\lambda\neq 0)$.

Τότε για κάθε διαμέριση του $[\alpha,\beta]$, λόγω της πυκνότητας και των ρητών και των αρρήτων στο $\mathbb{R}$, θα έχω $U(P,f)=\lambda\cdot(\beta-\alpha)$ και $L(P,f)=-\lambda\cdot(\beta-\alpha)$.

Δηλαδή, $U(P,f)\neq L(P,f)$, για κάθε διαμέριση του $[\alpha,\beta]$.

Το ίδιο ισχύει και το infimum και το supremum των διαμερίσεων, δηλαδή $\int_{\alpha}^{\beta^-} f(x)dx \neq \int_{\alpha^-}^{\beta} f(x)dx$, δηλαδή η f δεν είναι ολοκληρώσιμη. Όμως

$$|f|(x)=|\lambda| \ \forall x\in[\alpha,\beta] \ \text{ και } \ \int_{\alpha}^{\beta}|f|(x)dx=|\lambda|-(\beta-\alpha)$$

$$xe^{ax}=a\cdot e^{ax}\cdot)Ax+B)+A\cdot e^{az}\Rightarrow x\cdot e^{ax}=e^{ax}\cdot[aAx+aB+A]\Rightarrow (e^{ax}\neq 0\forall z\in\mathbb{R})$$

$x=aAx+aB+A\Rightarrow$ (εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα)

$$\left\{\begin{matrix} \alpha A=1 \\ \alpha B+A=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} A=\dfrac{1}{\alpha} \\ B=-\dfrac{1}{\alpha^2}\end{matrix}\right\}.$$

Επομένως $\int xe^{ax}dx=\left(\frac{1}{\alpha}x-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{ax}+C$ με άλλο τρόπο.

Η κλάση των αορίστων ολοκληρωμάτων $\int xe^{ax}dx$ με $\alpha\in\mathbb{R}^*$ είναι άπειρη (υπεραριθμήσιμη). Φυσικά κάθε ολοκλήρωμα της μορφής $\int P(x)\cdot e^{ax}dx$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο υπολογίζεται με τους δύο τρόπους που αναφέραμε. Βεβαίως υπάρχουν κι' άλλες άπειρες κλάσεις που υπολογίζονται με όχι μοναδική μέθοδο.

5. Επίσης ισχύει η πρόταση: «Αν η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η f^2 είναι ολοκληρώσιμη». Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αντίστροφη πρόταση: «Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και f^2 ολοκληρώσιμη, τότε και η f ολοκληρώσιμη». Δεν ισχύει και ως αντιπαράδειγμα μπορεί να παρατεθεί η συνάρτηση της προηγούμενης εφαρμογής:

Η $f(x)=\begin{cases}-\lambda, & x\in[\alpha,\beta]\cap\mathbb{Q}\\ \lambda, & x\in[\alpha,\beta]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη, παρότι η $f^2(x)=f(x)\cdot f(x)=\lambda^2$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ είναι και $\int_\alpha^\beta f^2(x)dx=\lambda^2(\beta-\alpha)$.

6. Είναι γνωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη. (Ολοκλήρωση Cauchy). Το ολοκλήρωμα Riemann επεκτείνει την ολοκληρωσιμότητα και σε μη συνεχείς συναρτήσεις. Υπάρχει η πρόταση που αποδεικνύει την ολοκληρωσιμοτητα μιας $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ όταν έχει ένα σημείο ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$.

Ως πόρισμα αυτής της πρότασης, αν θεωρήσουμε $k\in\mathbb{N}^*$ σημεία ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$, τότε εφαρμόζοντας την ολοκληρωσιμότητα σε *k* κλειστά υποδιαστήματα που περιέχουν ένα σημείο ασυνέχειας και εκμεταλλευόμενοι το ότι το ολοκλήρωμα σε διάστημα ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στα υποδιαστήματα, συμπεραίνουμε, ότι μια $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με *k* σημεία ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$ είναι ολοκληρώσιμη. Η αμέσως επόμενη επέκταση είναι αν έχω άπειρα σημεία ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή όμως υπάρχουν διάφορα είδη απείρου , η πλέον απλή περίπτωση απείρου είναι να έχω άπειρα μεν, αλλά αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$. Τότε, ίσως η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. (Συγκεκριμένα, χρειάζεται η ισχυρότερη συνθήκη της απόλυτης συνέχειας και της φραγμένης κύμανσης).

Σε περίπτωση ύπαρξης άπειρων αλλά υπεραριθμήσιμων σημείων ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$, το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann, δίνει αρνητικό αποτέλεσμα. Εκεί, την σκυτάλη της επέκτασης την παραλαμβάνει το

ολοκλήρωμα Lebesque, το οποίο μπορεί να αποφαίνεται και για τις περιπτώσεις όπου τα σημεία ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$ είναι υπεραριθμήσιμα. Συγκεκριμένα, το λήμμα του Lebesque λέει ότι μια συνάρτηση φραγμένη $[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $[\alpha,\beta]$ έχει μέτρο 0. Μέτρο 0, έχουν όλα τα πεπερασμένα και όλα τα αριθμήσιμα σύνολα, αλλά και κάποια από τα υπεραριθμήσιμα, όπως το σύνολο του Cantor.

Έτσι:

«Υπάρχει συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με άπειρα και αριθμήσιμα σημεία ασυνέχειας στο $[\alpha,\beta]$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{αν } x=\frac{m}{n} \text{ ρητός με } (n,m)=1\\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}.$$

Έστω δεδομένο $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει ο μικρότερος ακέραιος N για τον οποίο να ισχύει $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$ (1) (Διότι από αξίωμα Αρχιμήδη–Ευδόξου υπάρχει $N>\frac{2}{\varepsilon}$ που ισοδυναμεί με την (1)).

Έστω k, ο αριθμός των ρητών $\frac{m}{n}$ που έχουν παρονομαστή μικρότερο από N. Ο αριθμός αυτός k, είναι οπωσδήποτε πεπερασμένος, αφού μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα κλάσματα $\frac{m}{n}$, με $m<n<N$ με πεπερασμένα βήματα, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\dots,\frac{N-2}{N-1}.$$

Το ότι κάποια κλάσματα είναι ισοδύναμα με άλλα δεν μας ενοχλεί, αφού πάλι τα λιγότερα θα είναι πεπερασμένα, έστω –όπως ορίσαμε– k το πλήθος. Αν επιλέξω μια διαμέριση με λεπτότητα $\|P\|<\frac{\varepsilon}{4k}$ τότε μπορούμε να εγκλείσουμε τα k το πλήθος σημεία του $[0,1]$ σε υποδιάστημα μήκους μικρότερου από $\frac{\varepsilon}{2}$.

Δεδομένου ότι η f είναι φραγμένη από το 1, η ολική συνεισφορά στην διαφορά $U(P,f)-L(P,f)$ από τα υποδιαστήματα που περιέχουν αυτά τα k σημεία, δεν μπορεί να ξεπεράσει το $\frac{\varepsilon}{2}$. Στα διαστήματα που δεν περιέχουν κανένα απ' αυτά τα k σημεία, είναι $m_i = 0$ και $M_i \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$, επομένως η ολική συνεισφορά στη διαφορά $U(P,f)-L(P,f)$ από αυτά τα υποδιαστήματα είναι μικρότερη από $\frac{\varepsilon}{2}$.

Άρα, τελικά $U(P,f)-L(P,f) \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, πράγμα που σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

13.2. Το ολοκλήρωμα Riemann–Stieltjes

1.Υπάρχει συνάρτηση f, η οποία δεν είναι Riemann–Stieltjes ολοκληρώσιμη για καμμία αύξουσα συνάρτηση $\phi \neq$ O...

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε ως f τη συνάρτηση του Dirichlet ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, δηλαδή

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\in[\alpha,\beta] \text{ και } x \text{ ρητός} \\ 0, & x\in[\alpha,\beta] \text{ και } x \text{ άρρητος} \end{cases}.$$

Για κάθε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$, λόγω της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων στο $[\alpha,\beta]$ θα έχω $L(f,\varphi,P)=0$ και $U(f,\varphi,P)=1$. Δηλαδή δεν ικανοποιείται το κριτήριο $R-S$, επομένως η f δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά $R-S$.

Να σημειώσουμε, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesque και το ολοκλήρωμα έχει τιμή 0, όπως προβλέπεται στη θεωρία Μέτρου.

13.3. Ολοκληρωσιμότητα και πράξεις συναρτήσεων

1.Ως γνωστόν, η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και η σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων, είναι επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση.
Με κατάλληλο παράδειγμα να δείξετε, ότι η σύνθεση ολοκληρωσίμων, δεν είναι πάντοτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ τη συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ της προηγούμενης διαπραγμάτευσης, όπου δείξαμε ότι είναι ολοκληρώσιμη.

Επίσης, θεωρώ την $g:[0,1]\to$ Ñ, με $g(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$ η οποία είναι ασυνεχής σε ένα μόνο σημείο του $[0,1]$ και σύμφωνα με γνωστή πρόταση είναι ολοκληρώσιμη.
Η σύνθεση των f,g δίνει

$$h(x)=(f\circ g)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

η οποία όπως αποδείξαμε (εφ.1 παρόντος κεφαλαίου) δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.
Αξίζει να σημειωθεί ότι όπως αποδεικνύεται στην Θεωρία Μέτρου, η συγκεκριμένη συνάρτηση ("χαρακτηριστική του Ð") είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesque με τιμή ολοκληρώματος το 0.
Επίσης αξίζει να υπομνηθεί, ότι ισχύει η πρόταση «Ολοκληρώσιμη σε σύνθεση με συνεχή ολοκληρώσιμη, δίνει ολοκληρώσιμη».

2.Ισχύει η πρόταση, ότι «Αν f,g ολοκληρώσιμες, τότε και το γινόμενο της $f\cdot g$ θα είναι ολοκληρώσιμη». Να αποδείξετε ότι δεν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Πρέπει κι αρκεί, να βρω δύο συναρτήσεις f,g των οποίων το γινόμενο να είναι ολοκληρώσιμη ενώ μία τουλάχιστον από τις f,g να μην είναι ολοκληρώσιμη. Αν θεωρήσω $f,g:[0,1]\to$ Ñ με

$$f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ ρητός} \\ -1, & x \text{ άρρητος}\end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases}-1, & x \text{ ρητός} \\ 1, & x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

τότε οι f, g δεν είναι ολοκληρώσιμες (βλ. ανάλογη απόξειξη στην εφ. 1 του παρόντος κεφαλαίου.) όμως

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}-1, & x \text{ ρητός} \\ -1, & x \text{ άρρητος}\end{cases}=-1 \ \ \forall x\in[0,1]$$

η οποία προφανώς είναι ολοκληρώσιμη.

13.4. Ολοκληρωσιμότητα και συνέχεια

1.Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης $F:[\alpha,\beta]\to$ Ñ και $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ, για τις οποίες να ισχύει:

- $F(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} f(x)dt$
- $F'(x)\neq f(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f:[0,1]\to$ Ñ με $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq \frac{1}{2} \\ 1, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Αν $F:[0,1]\to$ Ñ με $F(x)=\int\limits_{0}^{x} f(t)dt$ τότε $F(x)=0$, οπότε και $F'(x)=0 \ \ \forall x\in[0,1]$.

Έτσι, $F'(x)\neq f(x)$.

Έχει σημειωθεί, ότι η f, δεν έχει καμία αρχική $G: G'(x)=f(x)$, διότι με εφαρμογή του θεωρήματος του Dabroux, η $G'(x)$ θα πρέπει να έχει την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών, άρα και η ίση της η $F(x)$, όμως $f(0)=0$ $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, ενώ $\nexists\in[0,1]: f(x)=\frac{1}{2}$. Άρα $\nexists G(x): G'(x)=f(x)$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήξαμε και στο πρώτο παράδειγμα του παρόντος κεφαλαίου.

Ανακεφαλαιώνοντας, υπενθυμίζουμε την πρόταση που ισχύει:

«Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ *συνεχής* στο $[\alpha,\beta]$ και $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} f(t)dt$, τότε η F' υπάρχει και $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[\alpha,\beta]$.

2. Ως γνωστόν, η συνέχεια μιας συνάρτησης f, είναι μια συνθήκη για την ύπαρξη αρχικής συνάρτησης της f (ή παράγουσας την f). Να αποδειχθεί, ότι η συνθήκη αυτή είναι μεν ικανή, αλλά όχι αναγκαία.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το ότι είναι ικανή, αποτελεί γνωστή πρόταση.

Το ότι δεν είναι αναγκαία, θα το αποδείξουμε με ένα αντιπαράδειγμα. Θα παραθέσουμε συνάρτηση f, μη συνεχή, και η οποία θα έχει αρχική συνάρτηση F.

Θεωρώ την $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\left\{\begin{matrix} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\cos x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{matrix}\right\}$.

Η f δεν είναι συνεχής στο 0 (βλ. Β.8.1.19.). Η f όμως, έχει αρχική συνάρτηση την $F:\ F(x)=\left\{\begin{matrix} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{matrix}\right\}$ η οποία είναι συνεχής και $G'(x)=f(x),\ \forall x\in[0,1]$,

3. Υπάρχει συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ αλλά η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $F(x)=\left\{\begin{matrix} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{matrix}\right\}$.

Τότε $F'(x)=f(x)=\left\{\begin{matrix} 2x^2\eta\mu\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{matrix}\right\}$.

Όμως, θεωρώντας την $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, έχω ότι $x_n\to 0$ και $x_n\neq 0\quad \forall n\in\mathbb{N}$, ενώ $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)=-2\sqrt{2\pi n}\to-\infty$, πράγμα που σημαίνει, ότι η f σε περιοχή του μηδενός *δεν είναι φραγμένη*, άρα η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

4. Να αποδειχθεί, ότι ο γνωστός τύπος $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(x)=G(x)-G(\alpha)$ **,όπου G(x) μία αρχική της** f**(x), δεν δίνει όλες τις αρχικές της** f **.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $f(x)=\text{συν}x$. Τότε

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x}\text{συν}t\,dt=\text{ημ}x-\text{ημ}\alpha\,. \qquad (1)$$

Επίσης μια αρχική της $f(x)=\text{συν}x$ είναι και η $G(x)=\text{ημ}x+15$, $x\in$ Ñ αφού $G'(x)=\text{συν}x=f(x)$.

Όμως, η $G(x)$ δεν μπορεί να προκύψει από τον τύπο (1), αφού $|-\text{ημ}\alpha|\leq 1$, $\forall\alpha\in$ Ñ.

14. ΜΗΚΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΦΡΑΓΜΕΝΗΣ ΚΥΜΑΝΣΗΣ

14.1. Μήκος συνάρτησης-φραγμένη κύμανση

1. Να κατασκευασθεί συνάρτηση $f:(0,1]\to[0,1]$ ώστε:

- **Να έχει άπειρο μήκος**
- **Η απόδειξη της "απειρίας του μήκους" να είναι η στοιχειωδέστερη δυνατή.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα κάνουμε την κατασκευή της f με γεωμετρικό-εποπτικό τρόπο.

Θεωρώ τα σημεία

$$A_n=\begin{Bmatrix} \left(\dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}},0\right), & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \left(\dfrac{3}{2^{\frac{n}{2}+1}},1\right), & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{Bmatrix}.$$

Σχηματίζω τη συνάρτηση που έχει ως γραφική παράσταση την άπειρη τεθλασμένη γραμμή $A_1A_2A_3A_4A_5\ldots$. Επίσης

$$(A_nA_{n+1})=\sqrt{\left(\frac{3}{2^{\frac{n+1}{2}+1}}-\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right)^2+(1-0)^2}>1\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Επομένως

$$(A_1A_2)+(A_2A_3)+(A_3A_4)+\cdots>1+1+1+\cdots\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}(A_kA_{k+1})>\sum_{k=1}^{\infty}1=+\infty.$$

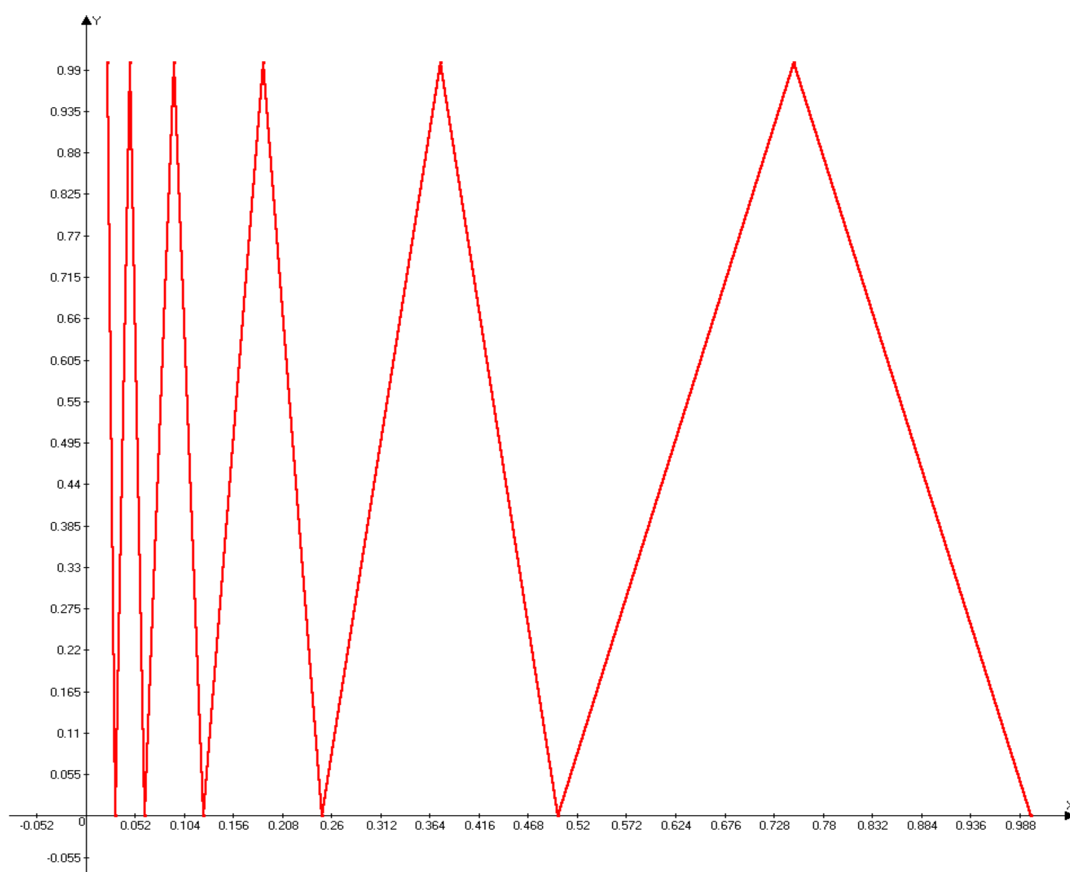
Επομένως $\sum_{k=1}^{\infty}(A_kA_{k+1})=+\infty$.

Γεωμετρικά, έχω μια εικόνα από άπειρα ισοσκελή τρίγωνα που όλα έχουν ύψος επί τη βάση ίσο με 1 και λόγω της ιδιότητας πλαγίας-καθέτου $(A_nA_{n+1})>1$, αφού στο νοητό ορθογώνιο τρίγωνο ύψος και πλευράς, η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από την κάθετη.

Η αναλυτική έκφραση της f, μπορεί να προκύψει ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} -2^{n+2}x+2^2, & x\in\left(\dfrac{3}{2^{n+2}},\dfrac{1}{2^n}\right] \\ 2^{n+2}x-2, & x\in\left[\dfrac{1}{2^{n+1}},\dfrac{3}{2^{n+2}}\right] \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad n=0,1,2,\dots.$$

Η f δεν είναι συνεχής στο 0, ούτε συνεχής επέκταση μπορεί να υπάρξει, αφού όπως έχουμε δείξει σε παρόμοιες εφαρμογές, δεν υπάρχει το όριο στο 0 μιας τέτοιας συνάρτησης, αφού αν θεωρήσω την $x_n = \dfrac{3}{2^{n+2}} \to 0$ τότε $f(x_n)=1\to 1$. Ενώ αν θεωρήσω την $x_n' = \dfrac{1}{2^n} \to 0$, τότε $f(x_n')=0\to 0$.



2. Στο προηγούμενο παράδειγμα το "πλάτος" της ταλάντωσης ήταν σταθερά ίσο με 1. Υπάρχει συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$ που να έχει άπειρο μήκος (να μη είναι δηλ. φραγμένης κύμανσης) αλλά το "πλάτος" της "ταλάντωσης" να είναι φθίνον και μάλιστα να τείνει στο 0;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα ορίσουμε την f ξανά με γεωμετρικό τρόπο: Θεωρώ τα σημεία

$$A_n=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n+1}\right), & n \text{ περιττός}\\ \left(\dfrac{1}{n+1},0\right), & n \text{ άρτιος}\end{cases}.$$

Δηλαδή αν n περιττός, έχω τα σημεία A_n στη διαγώνιο του τετραγώνου και αν n άρτιος, έχω τα A_n στην πλευρά του τετραγώνου που συμπίπτει με τον xx'. Θεωρώ την καμπύλη που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $A_0A_1 \cup A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup ... A_nA_{n+1} \cup ...$. Επίσης ορίζω $f(0)=0$, οπότε ορίζεται η f στο $[0,1]$. Με τη χρήση της γνωστής μας Ευκλείδειας μετρικής, έχουμε ότι:

$$d(A_0,A_1)>\frac{1}{2},\ d(A_1,A_2)>\frac{1}{2},\ d(A_2,A_3)>\frac{1}{4},$$
$$d(A_3,A_4)>\frac{1}{4},\ d(A_4,A_5)>\frac{1}{6},\ d(A_5,A_6)>\frac{1}{6},...$$

Γενικά έχω:

- Αν n άρτιος, $n+1$ περιττός και $d(A_n,A_{n+1})>\dfrac{1}{n+2}$, $d(A_{n+1},A_{n+2})>\dfrac{1}{n+2}$, σχέσεις που αποδεικνύονται εύκολα με την Ευκλείδεια μετρική.

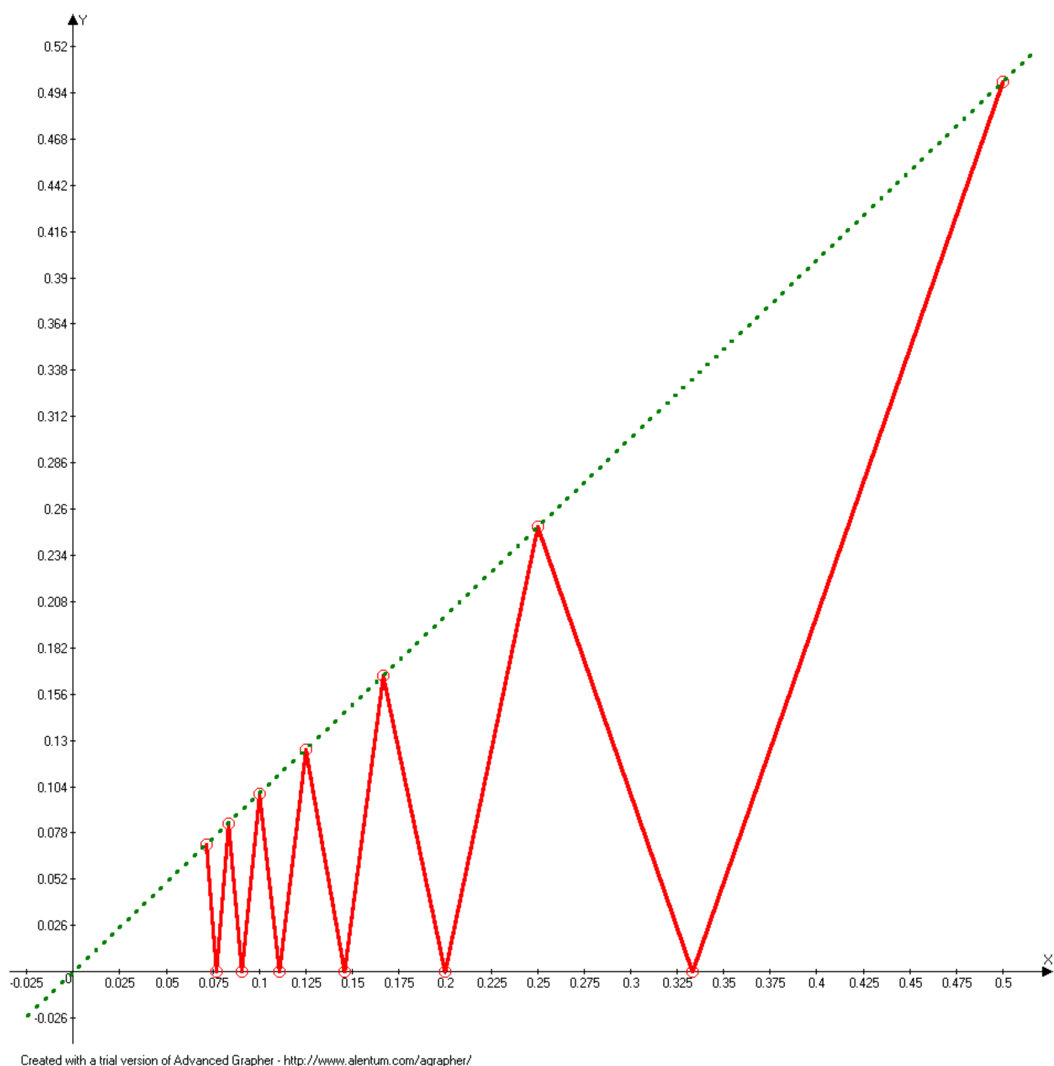
Επομένως, το μήκος της f, (*αν υπάρχει*) θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots.$$

Το τελευταίο όμως απειροάθροισμα είναι η γνωστή μας αρμονική σειρά η οποία συγκλίνει στο $+\infty$. Επομένως, η f έχει άπειρο μήκος (ή-σωστότερα) δεν έχει μήκος (αφού το μήκος νοείται πεπερασμένο). Επίσης το “πλάτος” της δίνεται από τον τύπο $\dfrac{1}{n+1}\to 0$.

Τελικά, για να έχει μήκος μια συνάρτηση (γενικότερα καμπύλη) και να είναι ευθυγραμμίσιμη, δεν φθάνει η συνέχεια. Πρέπει η f να είναι φραγμένης κυμάνσεως (ή φραγμένης μεταβολής) σε διάστημα $[\alpha,\beta]$ ή όπως ισοδυνάμως αποδεικνύεται, η f να έχει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$.

Για την απόδειξη της απειρίας του μήκους της, η μόνη μη στοιχειώδης γνώση που χρησιμοποιήσαμε είναι η απόκλιση της αρμονικής σειράς.



3. Υπάρχει $f:[0,1]\to$ Ñ που είναι:

- **Συνεχής στο** $[0,1]$
- **Παραγωγίσιμη στο** $(0,1]$
- **Δεν είναι φραγμένης κύμανσης (και άρα δεν είναι ευθυγραμμίσιμη) στο** $[0,1]$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την $f:[0,1]$ με $f(x)=\left\{\begin{matrix} x\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{matrix}\right\}$.

Έχομε ήδη αποδείξει ότι η f είναι συνεχής παντού και παραγωγίσιμη μόνο στο $(0,1]$.

Βρίσκω θέσεις απόλυτων τοπικών ακροτάτων στο $[0,1]$: Γι’ αυτό θεωρώ την εξίσωση:

$$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{(2k+1)\pi}{2},\ \ k\in Ù\,.$$

Επειδή $x\in(0,1)$ θεωρώ $k\in Í^*$ που είναι οι δεκτές λύσεις. Άρα $x=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$, $k\in Í^*$. Έτσι έχω $\left|f\left(\dfrac{2}{(2k+1)\pi}\right)\right|=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$.

Βρίσκω θέσεις απολύτως ελαχίστων:

$\eta\mu\dfrac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \left(x=\dfrac{2}{2k\pi}, k\in Ù\right)$ και για το $[0,1]$ έχω $k\in Í^*$.

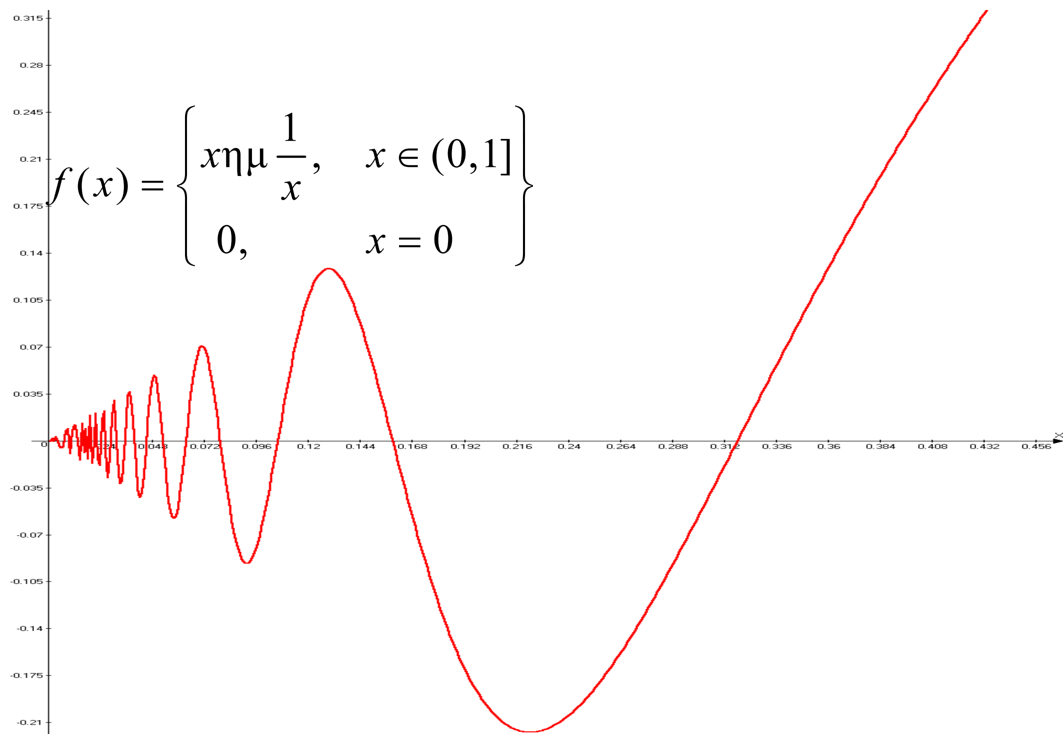
Θεωρώ τη διαμέριση του $[0,1]$

$$P_n=\left\{0,<\frac{2}{n\pi}<\frac{2}{(n-1)\pi}<\cdots<\frac{2}{2\pi}<\frac{2}{\pi}<1\right].$$

Τότε

$$V(f,P_n)=\left|f(1)-f\left(\frac{2}{\pi}\right)\right|+\left|f\left(\frac{2}{\pi}\right)-f\left(\frac{2}{2\pi}\right)\right|+\cdots+\left|f\left(\frac{2}{n\pi}\right)-f\left(\frac{2}{(n-1)\pi}\right)\right|+$$
$$+\left|f(0)-f\left(\frac{2}{n\pi}\right)\right|\geq\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

Άρα αν $n\to+\infty$ τότε $V(f)=+\infty$.



14.2. Απόλυτη συνέχεια

1.Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]$ που δεν είναι απόλυτα συνεχής.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{Bmatrix} x\eta\mu\frac{1}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{Bmatrix}$.

Έχομε δείξει (B.8.1.19.) ότι είναι συνεχής και από το προηγούμενο ότι $V(f)=+\infty$.

Αλλά από την θεωρία γνωρίζουμε, ότι αν μία συνάρτηση είναι απόλυτα συνεχής θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένης κύμανσης.

Επομένως η f δεν είναι απόλυτα συνεχής.

15. ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

15.1. Γενικά

1. Να αποδειχθεί ότι δεν έχει κάθε συνάρτηση f αρχική συνάρτηση F.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Υπάρχει η $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ αυτή δεν έχει αρχική συνάρτηση.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια αρχική της f, η F, ορισμένη σε κάποιο διάστημα $\Delta \subseteq$ Ñ, τότε θα έπρεπε βάσει του ορισμού της αρχικής, ότι $F'(x)=f(x), \forall x \in \Delta$.

Με εφαρμογή του Θ. Darboux, η F' θα πρέπει να έχει την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών, άρα και η ίση της η f.

Όμως η f δεν έχει τη δυνατότητα των ενδιαμέσων τιμών, αφού π.χ. $f(-5)=0, f(g)=1$ και η τιμή $\frac{1}{2}$ είναι ανάμεσα στο 0 και 1, ενώ δεν υπάρχει $x\in$ Ñ $: f(x)=\frac{1}{2}$.

Πρέπει να σχολιασθεί, ότι ενώ κάθε «στοιχειώδης συνάρτηση», έχει παράγωγο «στοιχειώδη συνάρτηση», εν τούτοις, κάθε στοιχειώδης συνάρτηση δεν έχει στοιχειώδη αρχική συνάρτηση.

Δηλαδή, το σύνολο E των στοιχειωδών συναρτήσεων ενώ είναι κλειστό ως προς την πράξη της παραγώγισης δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη της ολοκλήρωσης.

Η μη κλειστότητα του συνόλου E των στοιχειωδών συναρτήσεων ως προς την ολοκλήρωση, απεδείχθη κατά πρώτον με αντιπαραδείγματα από τον J. Liouville το 1833.

Για παράδειγμα, αποδεικνύεται, ότι οι αρχικές των $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}, \frac{e^x}{x}, \frac{\eta\mu x}{x}, \frac{1}{\ln x}$ δεν είναι στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Επίσης, το αόριστο ολοκλήρωμα $E(x)=\int\frac{dx}{(1-x^2)(1-\mu x^2)}$, για $\mu \neq 0$, δεν είναι στοιχειώδης συνάρτηση.

Για $\mu = 0$ έχω την στοιχειώδη συνάρτηση τοξημx. Το $E(x)$ λέγεται ελλειπτική συνάρτηση, η οποία για $\mu=-1$, μελετήθηκε από τον Conte di Fagnano κατά τα έτη

1714-1750. Συστηματική μελέτη των ελλειπτικών συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους, έγινε τον 18^o και 19^o αιώνα από τους Euler Legendre, Abel, Weirstrass κ.ά., με τη βοήθεια των μιγαδικών αριθμών.

Επίσης, μέσω της θεωρίας των ελλειπτικών συναρτήσεων, κατέστη δυνατόν, στοιχειώδεις συναρτήσεις, όπως η συνάρτηση ημx, οι οποίες ορίζονται με καθαρά Γεωμετρικό τρόπο, να ορισθούν με αναλυτικά μέσα.

2. Είναι γνωστή η ισχύς της θεμελιώδους προτάσεως:
«Αν δύο συναρτήσεις F_1 και F_2 είναι αρχικές συναρτήσεις μιας συνάρτησης f ορισμένης σε διάστημα Δ, τότε διαφέρουν κατά σταθερά, Αντιστρόφως, αν F_1 μια αρχική της f σε διάστημα Δ, τότε οποιαδήποτε άλλη F_2 που ορίζεται στο διάστημα Δ και διαφέρει κατά σταθερά από τον F_1, θα είναι κι αυτή μια αρχική της f.»
Να αποδείξετε, ότι η υπόθεση του διαστήματος Δ, είναι ουσιώδης για την ισχύ της προτάσεως, δηλ. η πρόταση δεν είναι αληθής εν γένει σε ένωση διαστημάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $f(x)=2x$, τότε οι συναρτήσεις $F(x)=x^2 /[0,1]\cup[2,3]$, $G(x)=\begin{cases} x^2+2, & x\in[0,1] \\ x^2-2, & x\in[2,3] \end{cases}$ ικανοποιούν τις ισότητες $F'(x)=G'(x)=f(x)=2x$ $\forall x\in[0,1]\cup[2,3]$, όμως $F(x)-G(x)=\begin{cases} -2, & x\in[0,1] \\ 2, & x\in[2,3] \end{cases}$.

Δηλαδή δεν διαφέρουν κατά σταθερά συνάρτηση.

3. Υπάρχει συνάρτηση $f(x)$, της οποίας υπάρχει η $f'(x)$, <u>αλλά γνωστής ούσης της $f'(x)$</u>, δεν μπορεί να υπολογισθεί η $f(x)$ με ολοκλήρωση της $f'(x)$.

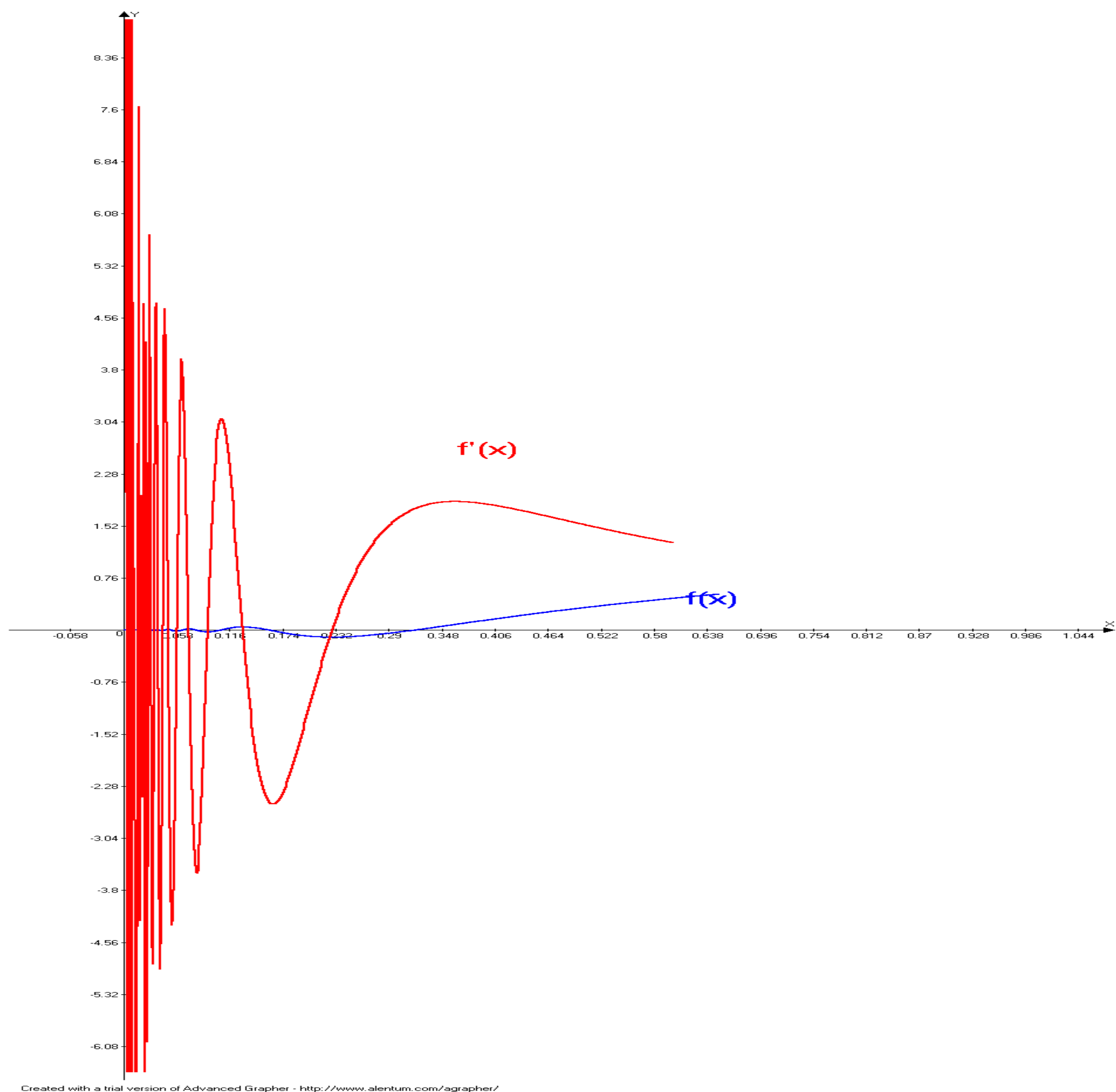
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x}\ \text{ημ}x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε, ότι

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}\ \text{ημ}x-\frac{1}{\sqrt{x}}\text{συν}\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

Λαμβάνοντας το $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ το βρίσκουμε να «ταλαντώνεται» απεριορίστως θετικά ή αρνητικά πλησιάζοντας εναλλάξ $+\infty$ και $-\infty$, δηλαδή η $f'(x)$ δεν είναι φραγμένη, άρα μη ολοκληρώσιμη σε διάστημα της μορφής $[0,\alpha]$.

Έτσι, η $f(x)$ είναι μια αρχική της $f'(x)$, η οποία όμως, δεν μπορεί να προκύψει με ολοκλήρωση της $f'(x)$.



15.2. Αόριστη Ολοκλήρωση.

1. Το ολοκλήρωμα $I=\int \frac{1}{x}dx$, δεν μπορεί να υπολογισθεί με παραγοντική ολοκλήρωση, διότι οδηγεί στην αντίφαση 1=0, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$I=\int \frac{1}{x}dx=\int x'\cdot\frac{1}{x}dx=x\cdot\frac{1}{x}-\int xd\frac{1}{x}=1-\int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=1=1+\int\frac{1}{x}dx=1+I.$$

Άρα, $I = 1 + I \to 1 = 0(!)$

Υπάρχει κάποιο λάθος στα παραπάνω;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Το λάθος στο παραπάνω είναι η παράληψη της σταθεράς ολοκλήρωσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτή η παράληψη δεν δημιουργεί πρόβλημα, αλλά σπανίως (όπως εδώ) μπορεί να δημιουργήσει αντίφαση.

Η τελική ισότητα θα ήταν $I = 1 + C + I$ που δεν συνιστά αντίφαση.

Να σημειωθεί., ότι δεν είναι το μόνο λάθος που μπορεί να προκύψει όταν δεν είμαστε προσεκτικοί στην παράθεση της σταθεράς ολοκλήρωσης.

Στο παρακάτω παράδειγμα θα «αποδείξουμε», ότι η γνωστή θεμελιώδης τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ δεν ... ισχύει!.

Έχουμε: $$\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{1}{2}\eta\mu^2 x \quad (1)$$

Αλλά και $$\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x \quad (2).$$

Με απλή παραγώγιση των δευτέρων μελών των (1) και (2) μπορούμε να κάνουμε επαλήθευση.

Έτσι από (1) και (2) έχω $$\frac{1}{2}\eta\mu^2 x = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x \Rightarrow$$ $$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$$ (!).

Το σωστό είναι οι (1) και (2) να γράφονται

$$\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}\eta\mu^2 x + C$$

$$\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu^2 x + C'$$

Με άλλα λόγια, το σύμβολο $\int f(x)dx$, όταν υπάρχει, δεν συμβολίζει μία συνάρτηση, αλλά ένα σύνολο συναρτήσεων που διαφέρουν κατά σταθερά C. Συνεπώς όταν είναι γνωστή μία <u>συγκεκριμένη</u> $F_{(x)}$ αρχική της $f(x)$ γράφουμε:

$\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in$ Ñ.

2. Να εξετασθεί η αλήθεια η μη της παρακάτω προτάσεως:

«Αν η $f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [\beta, \gamma] \\ h(x), & x \in (\gamma, \delta] \end{cases}$ **είναι συνεχής, και** $G(x), H(x)$ **είναι αρχικές των**

$g(x), h(x)$ **αντιστοίχως, τότε και η** $F(x)=\begin{cases} G(x), & x\in[\beta,\gamma] \\ H(x), & x\in(\gamma,\delta] \end{cases}$ **είναι μία αρχική της** $f(x)$**».**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Δεν ισχύει, όπως φαίνεται από το πιο κάτω αντιπαράδειγμα.

Η $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 0 \\ x\ln x, & x>0 \end{cases}$ είναι συνεχής και στο 0, αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ και

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x(=0\cdot(-\infty))=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim x=0 \text{ και } f(0)=0.$$

Τελικά, η $f(x)$ συνεχής $\forall x\in$ Ñ.

Μια αρχική της $g(x)=2x$ είναι η $G(x)=x^2+1$.

Μια επίσης αρχική της $h(x)=x\ell nx$ είναι η $H(x)=\frac{1}{4}\left(2x^2`\ln x-x^2\right)$.

Η $\Phi(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0 \\ \frac{1}{4}\left(2x^2\ln x-x^2\right), & x>0 \end{cases}$, δεν μπορεί να είναι αρχική της f, αφού δεν είναι συνεχής στο 0.

Ως γνωστόν, η αρχική μια ολοκληρώσιμης (επομένως και συνεχούς) συναρτήσεως, είναι συνεχής.

Για να ισχύει η πρόταση γενικά, θα πρέπει να θέσουμε $F(x)=\begin{cases} x^2+1+C, & x\le 0 \\ \frac{1}{4}\left(2x^2\ln x-x^2\right), & x>0 \end{cases}$, όπου C προσδιορίσιμη σταθερά, απαιτώντας η $F(x)$ να είναι συνεχής στο 0.

$F(0)=1+C$

$\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)=1+C$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\ln x-1}{\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{-8}{x^3}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(2-x)}{-8}=0.$$

Επομένως, πρέπει $C+1=0$ ή $C=-1$.

Άρα μία αρχική της $f(x)$ είναι η $F(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ \frac{1}{4}\left(2x^2\ln x - x^2\right), & x>0 \end{cases}$ και κάθε άλλη θα

είναι της μορφής $F_0(x)=F(x)+\lambda,\ \lambda\in Ñ$.

3. «Υπάρχουν άπειρα παραδείγματα αορίστων ολοκληρωμάτων, τα οποία υπολογίζονται με παραπάνω από μία μέθοδο υπολογισμού».
Μπορεί να αποδειχθεί ο παραπάνω ισχυρισμός;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Πρέπει κι αρκεί να βρούμε μια άπειρη κλάση συναρτήσεως των οποίων το αόριστο ολοκλήρωμα να υπολογίζεται με τουλάχιστον δύο τρόπους.

Θεωρώ το $\int xe^{\alpha x}dx, (\alpha\in Ñ^*)$, το οποίο υπολογίζεται ως εξής:

$$\int xe^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\int x\left(e^{\alpha x}\right)'dx=\frac{1}{2}\left(xe^{\alpha x}-\int e^{\alpha x}dx\right)=\frac{1}{\alpha}\left[xe^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha}\int\left(e^{\alpha x}\right)'dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha}xe^{\alpha x}-\frac{1}{a^2}e^{\alpha x}+C=e^{\alpha x}\cdot\left(\frac{1}{\alpha}x-\frac{1}{a^2}\right)=C.$$

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίσαμε το ολοκλήρωμα ήταν η παραγοντική ολοκλήρωση. Μπορεί να προσδιορισθεί και με την «μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών», ως ακολούθως:

Παρατηρούμε, την μορφή του ευρεθέντος ολοκληρώματος και εικάζουμε ότι πάντα αυτό ισχύει.

Δηλ. λαμβάνουμε πολυώνυμο, επί το $e^{\alpha x}$. Άρα θέτω $\int xe^{\alpha x}dx=e^{\alpha x}(Ax+B)=C$.

Με παραγώγιση και των δύο μελών έχω:

$$xe^{\alpha x}=\alpha\cdot e^{\alpha x}\cdot(Ax+B)+A\cdot e^{\alpha x}\Rightarrow x\cdot e^{\alpha x}=e^{\alpha x}\cdot[\alpha Ax+\alpha B+A]\Rightarrow\left(e^{\alpha x}\ne 0\forall x\in Ñ\right)$$

$x=\alpha Ax+\alpha B+A\Rightarrow$ (εκ ταυτότητος ίσα πολυώνυμα)

$$\begin{Bmatrix}\alpha B=1\\ \alpha B+A=0\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}A=\frac{1}{\alpha}\\ B=-\frac{1}{a^2}\end{Bmatrix}$$

Επομένως, $\int xe^{\alpha x}dx=\left(\frac{1}{\alpha}x-\frac{1}{\alpha^2}\right)e^{\alpha x}+C$ με άλλο τρόπο.

Η κλάση των αορίστων ολοκληρωμάτων $\int xe^{\alpha x}dx$ με $\alpha\in Ñ$ είναι άπειρη (υπεραριθμήσιμη). Φυσικά κάθε ολοκλήρωμα της μορφής $\int P(x)\cdot e^{\alpha x}dx$, όπου $P(x)$

πολυώνυμο υπολογίζεται με τους δύο τρόπους που αναφέραμε . Βεβαίως υπάρχουν κι άλλες άπειρες κλάσεις που υπολογίζονται με όχι μοναδική μέθοδο.

16. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Όταν υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων, χρησιμοποιούμε συνήθως τον τύπο των Newton-Leibniz: $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = F(x) - F(\alpha)$, όπου η f συνεχής και $F : F'(x) = f(x)$ σε διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Επιπλέον, πρέπει η F : να είναι συνεχής, παντού στο $[\alpha, \beta]$.

Η συνθήκη η τελευταία είναι απολύτως αναγκαία. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με παραδείγματα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Ισχύει $\left(\frac{1}{2}\text{τοξεφ}\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \neq 1$.

Τότε $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$ *βγαίνει δηλαδή το παράδοξο αποτέλεσμα αρνητικού ορισμένου ολοκληρώματος, μιας συνάρτησης παντού θετικής στο διάστημα ολοκλήρωσης*. Το λάθος βεβαίως είναι ότι η συνάρτηση $F(x) = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\frac{2x}{1-x^2}$ δεν ορίζεται για $x = 1 \in [0, \sqrt{3}]$. Η σωστή λύση είναι η εξής:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \text{τοξεφ}x\frac{2x}{1-x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \text{τοξεφ}\sqrt{3} - \text{τοξεφ}0 = \frac{\pi}{3}.$$

β) Ένα απλούστερο παράδειγμα: Έστω $f : [0,1] \to$ Ñ με $f(x) = 1$ και $F : [0,1] \to$ Ñ με $F(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x = 0 \\ x, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 1 \end{Bmatrix}$, τότε, προφανώς $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (0,1)$, $F(1) - F(0) = -1 \neq \int_0^1 f(x)dx = 1$. Αυτό βέβαια οφείλεται στο ότι η F δεν είναι συνεχής για $x = 0$ και για $x = 1$.

γ) Άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το $\int_0^{4\pi} \frac{dx}{4+\text{συν}x}$. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι παντού θετική, αφού $4+\text{συν}x \geq 3\ \ \forall x \in$ Ñ. Αν αντικαταστήσω το x, θέτοντας

$$\text{εφ}\frac{x}{2} = \omega \qquad (1)$$

τότε

$$\text{συν}x = \frac{1-\text{εφ}^2\frac{x}{2}}{1+\text{εφ}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2} \qquad (2)$$

Διαφορίζοντας την (1) έχω:

$d\left(\text{εφ}\frac{x}{2}\right) = d\omega \Rightarrow$

$\frac{1}{\text{συν}^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}dx = d\omega \Rightarrow$ (από τον τύπο του αποτετραγωνισμού του συνημιτόνου)

$\frac{2}{1+\text{συν}x} \cdot \frac{1}{2}dx = d\omega \Rightarrow \quad ((2))$

$\frac{dx}{1+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} = d\omega \Rightarrow$

$dx = \frac{2d\omega}{1+\omega^2}$.

Έτσι, το αρχικό ορισμένο ολοκλήρωμα, γίνεται:

για $x=0$, λόγω (1) έχω $\text{εφ}\frac{0}{2} = 0$,

για $x = 4\pi$, λόγω (1) έχω $\omega = \text{εφ}\frac{4\pi}{2} = 0$.

Άρα, $\int_0^{4\pi} \frac{dx}{4+\text{συν}x} = \int_0^0 \frac{1}{4+\frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}} \cdot \frac{2}{1+\omega^2} d\omega = 0$ (!).

Δηλαδή, το ορισμένο ολοκλήρωμα παντού θετικής συνάρτησης, είναι μηδέν! Φυσικά το λάθος προεκλίθη, στην αντικατάσταση, αφού η συνάρτηση $\text{εφ}\frac{x}{2}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $[0,4\pi]$.

2. Στο προηγούμενο, δείξαμε το ουσιώδες της συνθήκης η f να είναι συνεχής, ώστε να υπάρχει το ορισμένο ολοκλήρωμα.
Να δείξετε με ένα παράδειγμα, ότι όταν η f είναι ολοκληρώσιμη, χωρίς να είναι συνεχής, και έχει αρχική, τότε είναι δυνατόν να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα δείξουμε αυτή τη δυνατότητα με ένα γνωστό παράδειγμα. Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του $\int_0^{2/\pi}\left(2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\right)dx$.

Εδώ έχουμε $f(x)=2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x},\ x\neq 0$. Η $f(x)$ είναι συνεχής $\forall x\in Ñ\setminus\{0\}$. Τότε επεκτείνω την f, ώστε να ορίζεται στο 0 $\hat{f}(x)=\begin{cases}2x\eta\mu\frac{1}{\mathrm{x}}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Η επέκταση που κάναμε, εξακολουθεί να είναι ασυνεχής συνάρτηση. Μάλιστα, όπως έχουμε ήδη διαπραγματευθεί (Β.8.1.19) ό,τι τιμή και να ορίσουμε αντί για 0, δεν μπορεί να είναι συνεχής. Δηλαδή, η f δεν έχει συνεχή επέκταση στο Ñ. Όμως η $\hat{f}(x)$ είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{2}{\pi}\right)$ και ολοκληρώσιμη στο $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ αφού η ασυνέχεια σε ένα σημείο δεν επηρεάζει την ολοκληρωσιμότητα.

Παρατηρώ, ότι η $F: F(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\in\left(0,\frac{2}{\pi}\right)\\ 0, & x=0\end{cases}$. Αυτή όπως έχουμε δείξει είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$ και επίσης $F'(x)=f(x),\ \forall x\in\left[0,\frac{2}{\pi}\right]$.

Έτσι, $\int_0^{2/\pi}2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}=F\left(\frac{2}{\pi}\right)-F(0)=\frac{4}{\pi^2}$.

17. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

17.1. ΟΡΙΣΜΟΣ-ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

1. Να παρατεθούν κάποιες βασικές χρήσεις της έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων , στον Απειροστικό Λογισμό , ώστε να δικαιολογηθεί η αναγκαιότητα ορισμού της.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η ομοιόμορφη σύγκλιση, δίνει ικανές συνθήκες για απάντηση σε ερωτήματα που έχουν σχέση με τη δυνατότητα αντιμετάθεσης του συμβόλου του ορίου με τα σύμβολα της διαφόρισης της ολοκλήρωσης και του ιδίου του ορίου. Δηλαδή:

Όταν $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, εάν και πότε είναι αληθείς σχέσεις όπως οι παρακάτω:

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ (;)
- $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{d}{dx}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{d}{dt} f_n(x)$ (;)
- $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ (;)

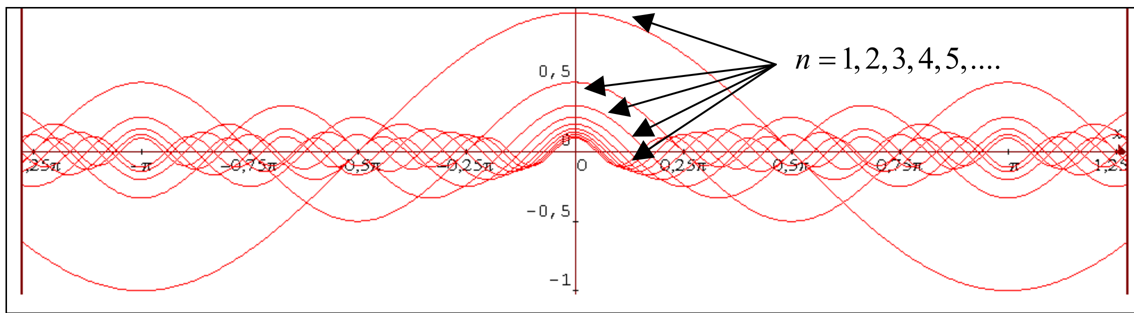
Επίσης, επειδή κάθε σειρά είναι και ακολουθία, ανάλογα ερωτήματα έχουμε και για την ομοιόμορφη σύγκλιση σειρών.

2. Υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση και ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει σε ασυνεχή συνάρτηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) Έστω $f_n(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu nx}{n}$, $n \in$ Í. Έχω δηλαδή μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων.

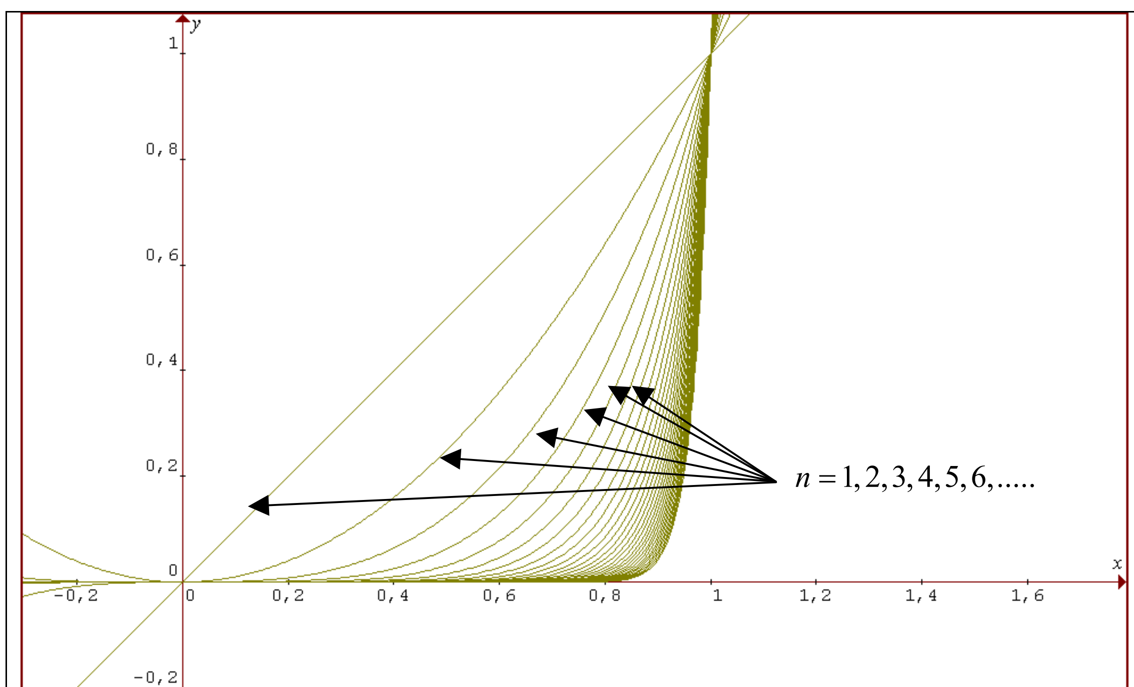
Τότε, $\forall x \in$ Ñ $f_n(x) \to 0$ (φραγμένη επί μηδενική συγκλίνει στο 0) και η $f(x) = 0$, $\forall x \in$ Ñ είναι συνεχής.



(ii) Έστω $g_n(x) = x^n$, $n \in$ Í, που έχουν κοινό πεδίο ορισμού το $[0,1]$. Τότε:

- Αν $x = 1,\ g_n(1) = 1^n \to 1$
- Αν $x \in [0,1],\ g_n(x) = x^n \to 0$

Δηλαδή $g_n(x) \to g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ η οποία είναι προφανώς ασυνεχής στο 1.

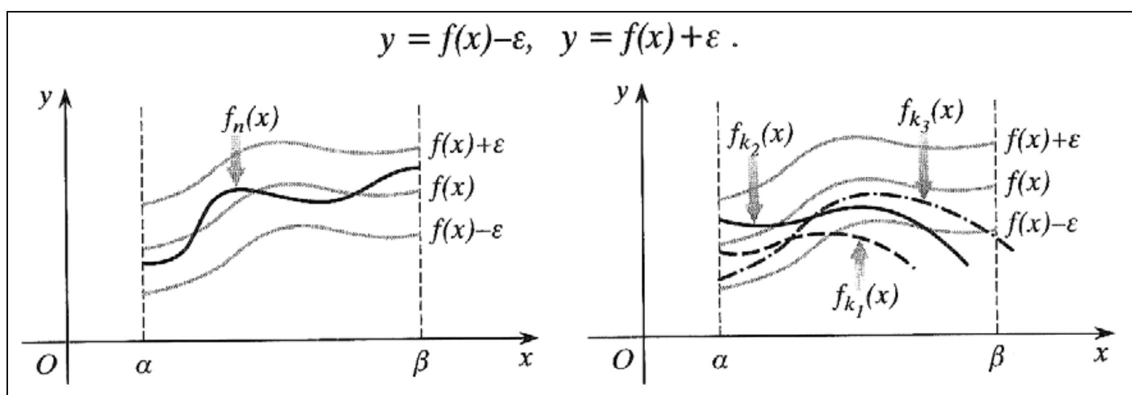


Η ακολουθία $f_n(x) = x^n$ για n=1,2,3,…,30 στο [0,1]

Η ποιοτική διαφορά ανάμεσα στις δύο ακολουθίες συναρτήσεων, είναι ότι η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, ενώ η g_n συγκλίνει απλά (κατά σημείο) στην g. Δηλαδή, εάν εφαρμόσουμε τον γνωστό ορισμό της σύγκλισης ακολουθιών κατά

σημείο, στην μεν πρώτη περίπτωση της f, $\forall \varepsilon > 0$ το n_0 που απαιτεί ο συνήθης ορισμός εξαρτάται από το ε, δηλαδή $n_0 = n_0(\varepsilon)$, ενώ στην δεύτερη περίπτωση $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ πράγμα που συνιστά και την ποιοτική διαφορά μεταξύ απλής (ή κατά σημείο) σύγκλισης και ομοιόμορφης σύγκλισης.

Η ποιοτική αυτή διαφορά γίνεται σαφέστερη και ορατή με τη γεωμετρική ερμηνεία των δύο ορισμών που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



3 . Υπάρχει:
(i) Ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή συνάρτηση
(ii) Ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει όχι ομοιόμορφα σε συνεχή συνάρτηση.

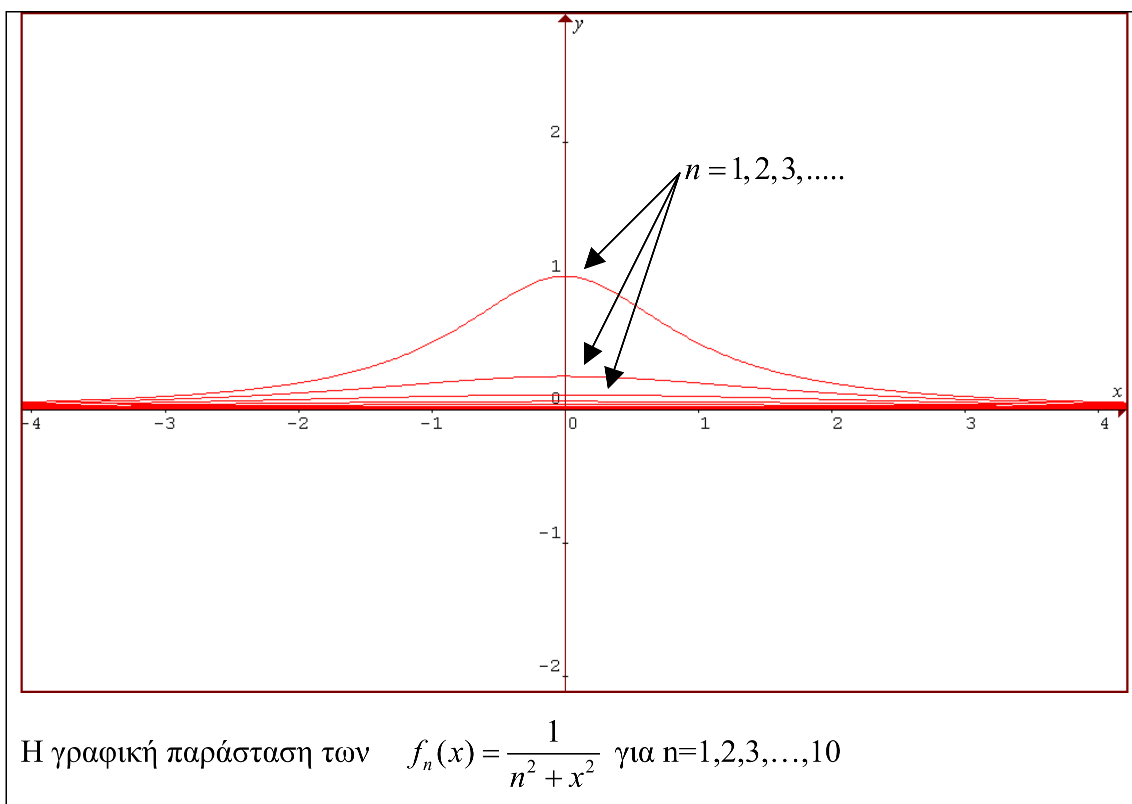
ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) Θεωρώ την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$, $n \in$ Í*, $x \in$ Ñ. Θα δείξω ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x) = 0$, $\forall x \in$ Ñ. Αν

$$|f_n(x) - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n^2 + x^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2 + x^2} < \varepsilon \qquad (1)$$

Όμως
$$\frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (2)$$

Οπότε $\forall \varepsilon > 0$, αν επιλέγω $n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$ τότε $\forall n > n_0 \underset{(2),(1)}{\Rightarrow}$ $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, αφού το n_0 εξαρτάται μόνο από το ε και όχι από το x.

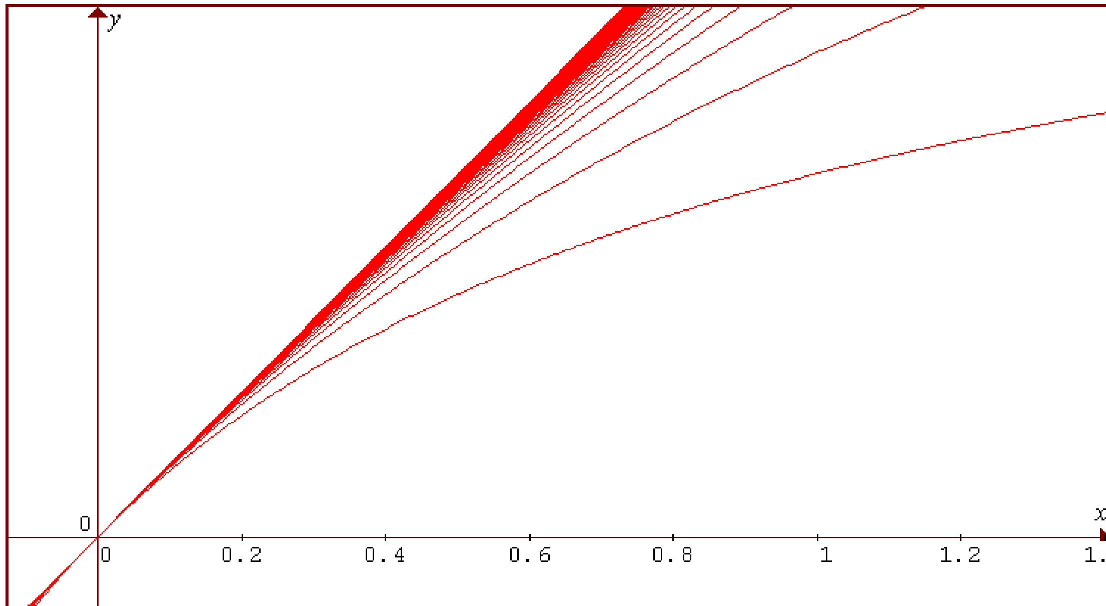


Η γραφική παράσταση των $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ για n=1,2,3,…,10

Ένα άλλο παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιομόρφως σε συνεχή , είναι η $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n = 1, 2, 3, ...n, ...$ Γι αυτήν έχουμε :

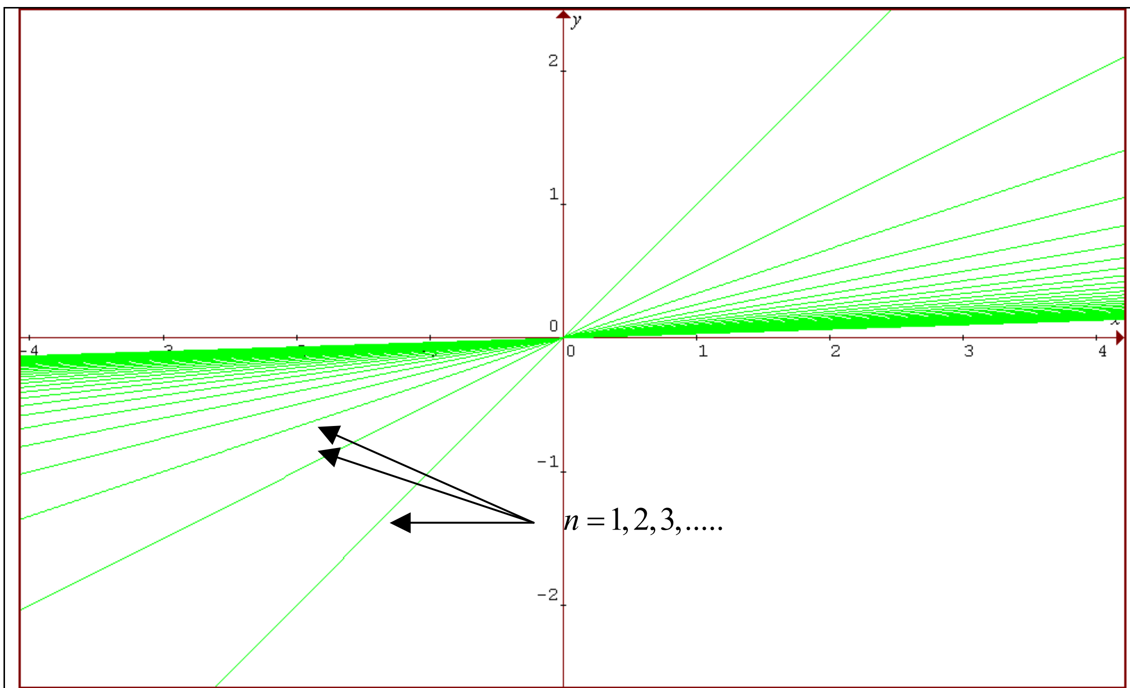
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x$, $x \in [0,1] \Rightarrow \sup | f_n(x) - f(x) | \leq \dfrac{1}{n} \to 0$, Άρα $f_n(x) \overset{u}{\to} f(x) = x$.

Εποπτικά η σύγκλιση αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα , όπου έχουν σχεδιασθεί οι 300 πρώτοι όροι της ακολουθίας , δηλ. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n = 1, 2, 3, ..., 300$.



(ii) Αν θεωρήσω την $f_n(x)=\frac{x}{n}$, $x\in$ Ñ, τότε αυτή συγκλίνει στην $f(x)=0$, $x\in$ Ñ, αλλά όχι ομοιόμορφα, όπως θα δείξουμε: Για συγκεκριμένο $x\in$ Ñ και $\varepsilon>0$, εκλέγουμε $n_0=\left[\frac{|x|}{\varepsilon}\right]+1$ (που εξαρτάται και από το ε και από το x). Τότε $\forall n>n_0 \Rightarrow \left|\frac{x}{n}\right|<\varepsilon$ πράγμα που σημαίνει ότι η $f_n(x)=\frac{x}{n}\to 0$ κατά σημείο, δηλαδή η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Παραστατικότερα, αυτό φαίνεται με την εξής θεώρηση: Αν ήταν η σύγκλιση ομοιόμορφη, τότε π.χ. για $\varepsilon=1$, θα έπρεπε να υπάρχει $n_0=n_0(1)\in$ Í $:\forall n\geq n_0$ και $\forall x\in$ Ñ, να ισχύει $\left|\frac{x}{n}\right|<\varepsilon=1$. Αλλά π.χ. για $n=n_0$ και $\forall x\in$ Ñ, θα πρέπει να ισχύει $\left|\frac{x}{n_0}\right|<1 \Leftrightarrow |x|<|n_0|$, $\forall x\in$ Ñ πράγμα άτοπο, αφού το Ñ δεν είναι φραγμένο!



Η γραφική παράσταση των $f_n(x)=\dfrac{x}{n}$ για n=1,2,3,…30 Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι και η πιο μικρή κλίση, μιας ευθείας, την «βγάζει έξω» και από την πιο μικρή λωρίδα εκατέρωθεν του χχ'

4. Το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Dini λέει ότι

«Αν $f\ ,\ f_n:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις για n=1,2,3,… ώστε $f_{n+1}(x)\le f_n(x)\quad \forall x\in[a,\beta]$ και n=1,2,3,4,…και $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ για $x\in[a,\beta]$,

τότε $f_n\overset{u}{\to} f$ »

Να αποδειχθεί ότι η υπόθεση της σύγκλισης σε κλειστό διάστημα και φραγμένο (δηλ. συμπαγές) είναι ουσιαστική για να ισχύει το συμπέρασμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $f_n(x)=\dfrac{x}{n},\ n\in$ Í στο διάστημα $[0,+\infty)$ αυτή είναι:

- Φθίνουσα, αφού $f_{n+1}(x)=\dfrac{x}{n+1}\le\dfrac{x}{n}=f_n(x)\ \ \forall x\in[0,+\infty)$
- $f_n(x)\to 0=f(x),\ \forall x\in[0,+\infty)$ συνεχής.

Αλλά: Δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$ όπως έχουμε δείξει στο (ii) της προηγούμενης εφαρμογής για το Ñ και όπου η απόδειξη για το $[0,+\infty)$ είναι εντελώς παρόμοια.

Ένα άλλο παράδειγμα ακολουθίας είναι το εξής:

$f_n:[0,1)\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=x^n$ $\mu\varepsilon$ $n=1,2,3,....,$ $x^{n+1}\le x^n$ $\forall x\in[0,1)$ και αυτή συγκλίνει κατά σημείο στην f(x)=0 , αλλά όχι ομοιόμορφα , διότι το πεδίο ορισμού των f_n το [0,1) δεν είναι κλειστό και φραγμένο..

5. Στην κατά σημείο σύγκλιση ακολουθιών, μπορεί να αποδειχθεί η πρόταση, ότι «Αν $f_n\to f$ και $g_n\to g$ τότε η $f_n\circ g_n\to f\circ g$ στο *I*, όπου *I* το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων».

Να εξετασθεί αν ισχύει η ίδια πρόταση και για την ομοιόμορφη σύγκλιση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα παραθέσουμε αντιπαράδειγμα, δύο συγκλινουσών ομοιόμορφα ακολουθιών, των οποίων το γινόμενο, δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Έστω η σταθερή ακολουθία $f_n(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ στο $I=[0,1)$. Ο ορισμός της ομοιόμορφης σύγκλισης εκπληρούται προφανώς, αφού $|f_n(x)-f(x)|=|0|=0<\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$ και $\forall n\in$ Í.

Έστω επίσης η ακολουθία $g_n(x)=(1-x^2)x^n$.

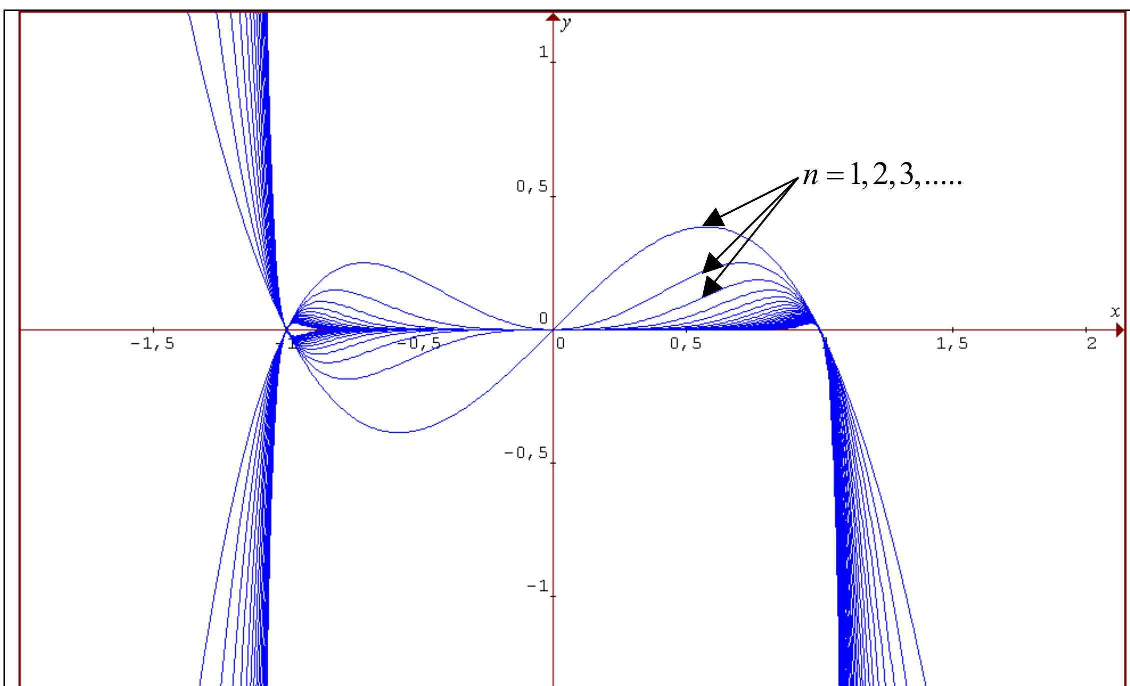
Αυτή συγκλίνει επίσης ομοιόμορφα στην συνάρτηση $g(x)=0$, $\forall x\in[0,1)$. Η απόδειξη μπορεί να γίνει με απλή εφαρμογή του κριτηρίου του Dini δεδομένου ότι $g_{n+1}(x)\le g_n(x)$, $\forall x\in[0,1)$ είναι συνεχείς, η $f(x)=0$ συνεχής στο [0,1) και $g_n(x)\to 0$. Άρα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Το γινόμενο $f_n(x)\cdot g_n(x)=x^n$ συγκλίνει στην $f(x)\cdot g(x)=0$, στο [0,1).

Η σύγκλιση όμως αυτή δεν είναι ομοιόμορφη, διότι αν ήταν, θα έπρεπε σύμφωνα με γνωστό κριτήριο να ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty}[\sup|f_n(x)-f(x)|]=0$.

Όμως $\lim\limits_{n\to+\infty}[\sup\limits_{x\in I}|x^n-0|]=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$.

Για να ισχύει η ομοιόμορφη σύγκλιση και για το γινόμενο των ομοιόμορφα συγκλινουσών συναρτήσεων, θα πρέπει να ισχύει μια επιπλέον συνθήκη, δηλ. οι $f_n(x)$ και $g_n(x)$ να είναι *ομοιόμορφα φραγμένες* συναρτήσεις, πράγμα που σημαίνει, ότι $\exists M>0:|f_n(x)|<M$, $\forall n\in$ Í, $\forall x\in I$.



Η γραφική παράσταση των $f_n(x)=x^n(1-x^2)$ για n=1,2,3,…30 στο R . Ο περιορισμός τους στο [0,1) δίνει ακολουθία ομοιόμορφα συγκλινουσών συναρτήσεων.

6. Να δειχθεί, ότι είναι δυνατόν ακολουθία ασυνεχών συναρτήσεων, να συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή συνάρτηση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $f_n(x)=\begin{Bmatrix} 0, & x\in[0,1] \\ \dfrac{x}{n}, & x\in(1,2] \end{Bmatrix}$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x)=\dfrac{1}{n}$.

Επομένως οι συναρτήσεις $f_n(x)$ είναι ασυνεχείς $\forall n\in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $f_n(x)$ συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση στο (1,2).

Τότε: $|f_n(x)-f(x)|\leq \dfrac{x}{n}<\dfrac{2}{n}\to 0$, $\forall n\in \mathbb{N}$, $\forall x\in[0,2]$. Εφ΄ όσον $\sup|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{2}{n}\to 0$ η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση.

7. Να δείξετε, ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση σε διάστημα $(-\alpha,\alpha)$, $\forall \alpha\in \mathbb{R}_+^*$ δεν σημαίνει ομοιόμορφη σύγκλιση στο $(-\infty,+\infty)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = \dfrac{2x+n}{x+n} = 1 + \dfrac{x}{n} \to 1$ στο $(-\alpha,\alpha)$, $\forall \alpha > 0$.

Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{x}{x+n} \right| \leq \frac{\alpha}{n-\alpha} < \varepsilon, \ \forall n > \alpha \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right).$$

Το $n = n_0(\varepsilon,\alpha)$ δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο κάθε φορά $x \in (-\alpha,\alpha)$.

Όμως
$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+n}{x+n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{n}{x}}{1 + \frac{n}{x}} = 2 \qquad (1)$$

και
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \neq 2.$$

Άρα η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη, αφού π.χ. σε μια λωρίδα πλάτους 1 (για $\varepsilon = \frac{1}{2}$) εκατέρωθεν της $f(x) = 1$, δεν βρίσκονται τελικά άπειρες καμπύλες $f_n(x)$, αφού $\forall n \in$ Í, οι $f_n(x)$ για επαρκώς μεγάλο α και x (: $x > M$) οι τιμές της $f_n(x)$ λόγω (1) βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο 2, άρα εκτός της λωρίδας $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$.

8. Να κατασκευαστεί παράδειγμα ακολουθίας συναρτήσεων $f_n(x)/$ Ñ που είναι παραγωγίσιμες $\forall n \in$ Í επίσης $f_n \to f$, αλλά η *f* να μην είναι παραγωγίσιμη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η λογική κατασκευής του παραδείγματος είναι να επιλέξουμε μία απλή και μη παραγωγίσιμη συνάρτηση (π.χ. την $f(x) = |x|$) και να επιχειρήσουμε να την προσεγγίσουμε με μια ακολουθία ομοιόμορφα συγκλινουσών συναρτήσεων.

Οι ακολουθίες f_n, έχουν την ίδια αναλυτική έκφραση με την $f(x) = |x|$ εκτός του διαστήματος $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$ $n \in$ Í ενώ εντός η γωνία με κορυφή το 0, λειαίνεται εξομαλύνεται με παρεμβολή-προσάρτηση της τετραγωνικής καμπύλης $y = \alpha x^2 + \beta$, φροντίζοντας να υπάρχει συνέχεια στα άκρα για τις τιμές $x = \pm \frac{1}{n}$, και να είναι

παραγωγίσιμη για τις ίδιες τιμές, δηλαδή η συνάρτηση $y' = 2\alpha x$ να παίρνει τις τιμές – 1 και 1 για $-\frac{1}{n}$ και $\frac{1}{n}$ αντιστοίχως. Με επίλυση ενός απλού συστήματος δύο εξισώσεων με 2 άγνωστους, βρίσκουμε τα α, β συναρτήσει του n και έτσι έχουμε την ακολουθία $f_n(x)$ για την οποία γνωρίζουμε εποπτικά ότι πλησιάζει την $f(x) = |x|$ οσοδήποτε κοντά $\forall \varepsilon > 0$. Έτσι ορίζω:

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right) \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}, & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ +x, & x \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right) \end{array} \right\} n \in \mathbb{N}$$

που είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε

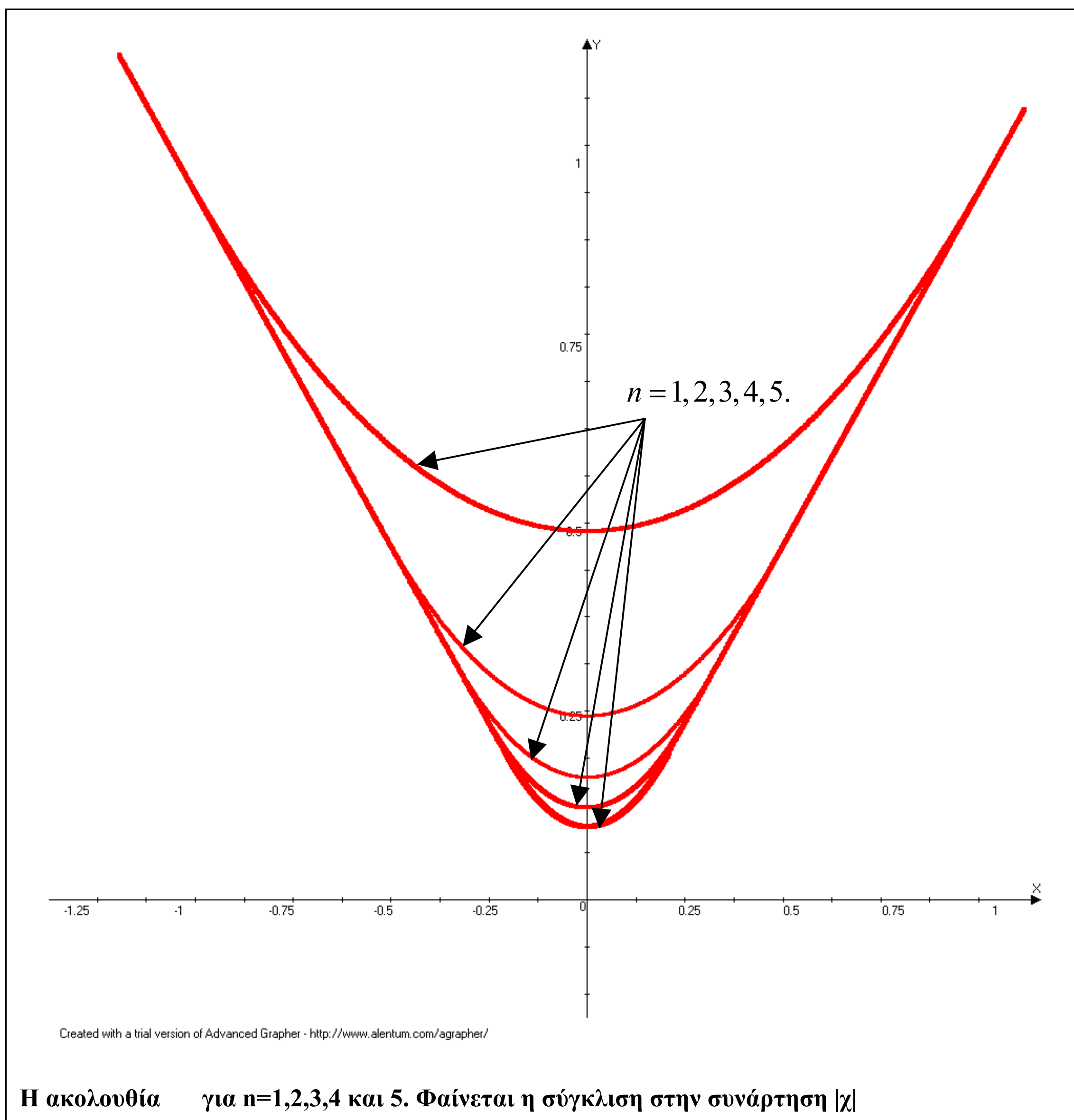
$$\left| f_n(x) - |x| \right| = \left\{ \begin{array}{ll} 0, \text{ αν} & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right) \\ \left| \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} - |\chi| \right|, & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0, \text{ αν} & x \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right) \end{array} \right\}$$

Οπότε $$\left| f_n(x) - |x| \right| \le \left| \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} \right| < \left| \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Δηλ. $$\left| f_n(x) - |x| \right| < \frac{1}{n} \to 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Σύμφωνα με γνωστό κριτήριο, η (1) συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση των $f_n(x)$ και $f(x)$.

Ως γνωστόν η $f(x) = |x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.



Η ακολουθία για n=1,2,3,4 και 5. Φαίνεται η σύγκλιση στην συνάρτηση |χ|

17.2. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ

1. Να κατασκευασθεί παράδειγμα ακολουθίας συναρτήσεων $f_n(x)/[0,1]$ οι οποίες να είναι ολοκληρώσιμες και $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim f_n(x)dx$.

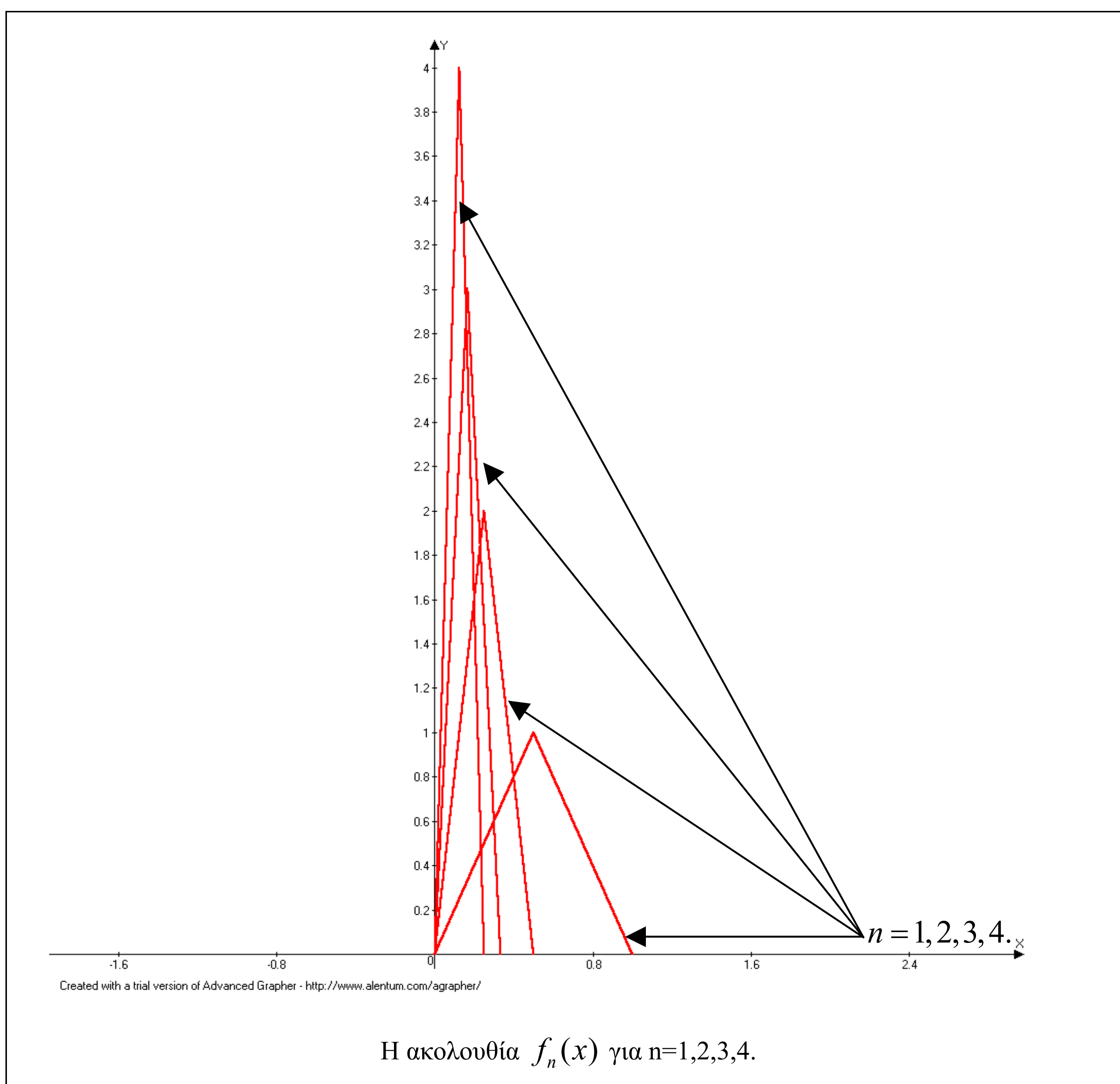
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ ισοσκελές τρίγωνο με βάση μήκους 1 και ύψος μήκους 1. Τότε το εμβαδόν του είναι $\frac{1}{2}$. Θεωρώντας άλλο ισοσκελές τρίγωνο με βάση μήκους $\frac{1}{2}$ και ύψος 2, τρίτο τρίγωνο με βάση $\frac{1}{3}$ και ύψος 3 κ.ο.κ. βάση μήκους $\frac{1}{n}$ και ύψος

n. Όλα έχουν εμβαδόν $\frac{1}{2}$. Με αυτή τη γεωμετρική ιδέα, συνεχίζοντας αυτή την κατασκευή επ' άπειρον, έχω την ακολουθία των συναρτήσεων:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & x \in \left(0, \frac{1}{2n}\right) \\ -2n^2 x + 2n, & x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{n}, 0\right) \end{cases}.$$

Προφανώς εκ κατασκευής έχω ότι $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Όμως $f_n(x) \to f(x) = 0, \ \forall x \in [0,1]$ και βεβαίως $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$.



Η ακολουθία $f_n(x)$ για n=1,2,3,4.

2. Υπάρχει παράδειγμα ακολουθίας συναρτήσεων $f_n(x)/[0,1]$ οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες, αλλά $\lim\int_0^1 f_n(x)dx = +\infty$ και $\int_0^1 \lim f_n(x)dx < +\infty$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ την ακολουθία $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n \ /[0,1]$. Τότε

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n dx = n^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \int_0^1 (1-x^2)'(1-x^2)^n dx =$$

$$= n^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{n+1} \int_0^1 \left[(1-x^2)^{n+1}\right]' dx = -\frac{n^2}{2(n+1)} \cdot \left[(1-x^2)^{n+1}\right]_0^1 = +\frac{n^2}{2(n+1)} \to +\infty .$$

Ενώ $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n^2 x)'}{\left[\dfrac{1}{(1-x^2)^n}\right]'} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-2x(1-x^2)^{n+1}\right] = 0$ δεδομένου ότι για x=1, έχω $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$, ενώ $x<1 \Rightarrow x(1-x^2)^{n+1} \to 0$ και $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$.

3. Υπάρχει παράδειγμα ασυνεχών συναρτήσεων $f_n(x)$ που είναι Riemann ολοκληρώσιμες και συγκλίνουν σε μη Riemann ολοκληρώσιμη $f(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αρίθμηση των ρητών του [0,1] , θέτουμε $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \left\{\begin{matrix} 0, & x\in[0,1]\setminus\{\rho_1,\rho_2,...,\rho_n\} \\ 1, & x\in\{\rho_1,\rho_2,...,\rho_n\} \end{matrix}\right\}.$$

Κάθε μια από τις $f_n(x)$ είναι συνεχής στο [0,1] εκτός από πεπερασμένο πλήθος σημείων που παρουσιάζει ασυνέχεια. Άρα σύμφωνα με γνωστή πρόταση κάθε μια από τις $f_n(x)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Όμως $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \left\{\begin{matrix} 0, & x\in[0,1] \\ 1, & x\in[0,1 \end{matrix}\right\}$ που είναι η γνωστή συνάρτηση του Dirichlet η οποία όπως έχουμε δείξει ( ) δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

4. Να δειχθεί, ότι όταν $f_n \to f$, f_n, f παραγωγίσιμες, τότε δεν έπεται ότι $f_n' \to f'$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν τότε $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \eta\mu(nx) / Ñ$, $n \in Í$ τότε

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sup|f_n(x)-0|\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\sup\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\eta\mu(nx)\right]\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 .$$

Άρα $f_n(x) \to f(x) = 0,\ \forall x \in Ñ$. $f_n'(x) = \sqrt{n}\sigma\upsilon\nu(nx)$. Τότε: $f_n'(0) = \sqrt{n}$, ενώ $f'(0) = 0$. Έτσι $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(0) = +\infty \neq 0 = f'(0)$.

17.3 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΑΝΤΟΥ ΚΑΙ ΠΟΥΘΕΝΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ

1. Υπάρχει συνάρτηση $f : Ñ \to Ñ$ παντού συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Πρόκειται για γεγονός που εκφεύγει, της συνήθους (πεπερασμένης) ανθρώπινης εποπτείας και που βεβαίως σημαντικά ιστορικό γεγονός στην εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού μιας και το πρωτοπαρουσίασε ο Weierstrass, όπως αναφέρουμε και στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας.

- Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{2^n}\sigma\upsilon\nu(3^n x),\ n \in Í$.

  Οι συναρτήσεις $f_n(x)$ είναι προφανώς συνεχείς και παραγωγίσιμες.

- Η αντίστοιχη σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\sigma\upsilon\nu(3^n x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f(x)$ σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass.

  Πράγματι, $|f_n(x)| = \left|\frac{1}{2^n}\sigma\upsilon\nu(3^n x)\right| \leq \frac{1}{2^n},\ \forall x \in Ñ$. Η γεωμετρική σειρά είναι σειρά θετικών όρων $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ και συγκλίνει στο 2. Άρα η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ είναι απόλυτα συγκλίνουσα στο Ñ, και έστω $f(x)$ η συνάρτηση που συγκλίνει. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς στην $f(x)$, έπεται ότι η $f(x)$ είναι συνεχής.

- Ισχύει ότι:

$f_n'(x) = -\frac{1}{2^n} \eta\mu(3^n x) \cdot 3^n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n \eta\mu(3^n x)$ είναι συνεχείς. Αν θεωρήσω την σειρά των παραγώγων των $f_n(x)$ θα έχω την $-\sum \left(\frac{3}{2}\right)^n \eta\mu(3^n x)$. Η σειρά αυτή δεν συγκλίνει αφού $\left(\frac{3}{2}\right)^n \eta\mu(3^n x) \not\to 0,\ \forall x \neq 2\kappa\pi$.

Επομένως, η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sigma\upsilon\nu(3^n x)$, $x \in$ Ñ *δεν* είναι παραγωγίσιμη, αφού σύμφωνα με ισχύουσα πρόταση, θα έπρεπε και η σειρά των παραγώγων των $f_n(x)$ να συγκλίνει (ομοιόμορφα μάλιστα) στο Ñ.

Το παραπάνω παράδειγμα διεκδικεί την θέση του ανάμεσα στα πλέον εντυπωσιακά ιστορικά παραδείγματα του Απειροστικού Λογισμού.

18. ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1.Υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ μη ολοκληρώσιμης, αλλά ο περιορισμός της f σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[x_0,\beta]$, με $\alpha < x_0 < \beta$ να είναι ολοκληρώσιμη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Αν $f:[0,1]\to$ Ñ με $f(x)=\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{Bmatrix}$. Τότε η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο [0,1] δεδομένου ότι δεν είναι φραγμένη σε αυτό, αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Όμως η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[x_0,1]$ με $0<x_0<1$ αφού εκεί είναι συνεχής και φραγμένη.

Υπενθυμίζουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση f, λέγεται *τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση.*

2.Να δοθούν τρία παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων *f*, *g*, *h* ορισμένων σε διαστήματα της μορφής $[k,+\infty)$ για τις οποίες να ισχύει:

α) $\int_{\alpha}^{\infty} f(x) < +\infty$

β) $\int_{\alpha}^{+\infty} g(x) = +\infty$

γ) $\int_{\alpha}^{+\infty} h(x)$ **δεν υπάρχει**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Θεωρώ την $f:[0,+\infty)$ με $f(x)=e^{-x}$. Τότε η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο

$$[0,+\infty) \text{ και } \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} e^{-x}dx = \lim_{\beta\to+\infty}(1-e^{-\beta})=1.$$

β) Θεωρώ την $g:[1,+\infty]\to$ Ñ με $g(x)=\frac{1}{x}$.

Τότε $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \log \beta = +\infty$.

γ) Θεωρώ την $h:[0,+\infty)$ με $h(x) = \text{ημ}x$.

Τότε $\int_0^{+\infty} \text{ημ}x dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^{\beta} \text{ημ}x dx = \lim_{\beta \to +\infty} (1 - \text{συν}\beta)$ (1)

Το τελευταίο όμως όριο δεν υπάρχει, διότι αν θεωρήσω ακολουθία $x_n = 2\pi n \to +\infty$, τότε $\lim_{n \to +\infty} (1 - \text{συν}x_n) = \lim_{n \to +\infty} (1-1) = 0$. Ενώ αν θεωρήσω την ακολουθία $y_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$, τότε $\lim_{n \to +\infty} (1 - \text{συν}y_n) = \lim_{n \to +\infty} (1-0) = 1$.

3.Παράδειγμα συνεχούς συναρτήσεως $f:$ Ñ→Ñ για την οποία το $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ υπάρχει:

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θεωρώ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ / Ñ. Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{\alpha \to -\infty} (\text{τοξ εφ}a) + \lim_{\beta \to +\infty} (\text{τοξ εφ}\beta) = \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

4.Να αποδειχθεί ότι γενικώς,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \neq \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)dx \qquad \textbf{(*)}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{ημ}x dx$. Τότε $\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)dx = \lim_{\alpha \to +\infty} (\text{συν}\alpha - \text{συν}\alpha) = 0$. Όμως,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} f(x)dx$$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-\alpha}^{0} \text{ημ}x dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} \text{ημ}x dx = \lim_{\alpha \to +\infty} [-\text{συν}x]_{-\alpha}^{0} + \lim_{\beta \to +\infty} [-\text{συν}x]_{0}^{\beta}$$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} [-1 - \text{συν}\alpha] + \lim_{\beta \to +\infty} [-\text{συν}\beta - 1] \qquad (1)$$

Αλλάζοντας τον συμβολισμό η (1) ισούται με $2\cdot\lim\limits_{\alpha\to+\infty}(-1-\text{συν}\alpha)$ όριο που δεν υπάρχει διότι αν θεωρήσω την $x_n = 2\pi n \to +\infty$ τότε $2\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-\text{συν}2\pi n) = 2(-2) = -4$. Αν όμως θεωρήσω $y_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$ τότε $2\lim\left[-1-\text{συν}\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cdot(-1) = -2$. Επομένως, το $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\text{ημ}x dx$ δεν υπάρχει, και έτσι δείξαμε ότι γενικώς

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \neq \lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx.$$

Υπενθυμίζουμε, ότι το δεύτερο μέλος της διαφοροισότητας (*) λέγεται πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy του ολοκληρώματος $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ και συμβολίζεται με C.P.V. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Δηλαδή

$$\text{C.P.V}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)dx.$$

Γενικά ισχύει ότι «Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \beta \Rightarrow \text{C.P.V}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \beta\text{».}$$

Ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει.

Η μη ισχύς του αντιστρόφου δείχνεται με το αντιπαράδειγμα που ήδη χρησιμοποιήσαμε.

5. Να αποδειχθεί, ότι για να συγκλίνει ένα ολοκλήρωμα α΄ είδους, δεν είναι αναγκαίο η ολοκληρωτέα συνάρτηση να είναι φραγμένη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x) = x\text{ημ}x^4$, η οποία δεν είναι φραγμένη, αφού αν θεωρήσουμε την ακολουθία $x_n = \sqrt[4]{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \to +\infty$ τότε

$$f(x_n) = \sqrt[4]{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\,\text{ημ}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[4]{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \to +\infty.$$

Θα δείξουμε, ότι $\int_0^{+\infty} x\eta\mu x^4 dx < +\infty$. Αφού $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$, αν αποδείξουμε τη σύγκλιση του $\int_1^{\infty} f(x)dx$, δεδομένου ότι το $\int_0^1 f(x)dx$ υπάρχει, τότε θα έχουμε αποδείξει και την σύγκλιση του ολοκληρώματος $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Cauchy: Θεωρώ το $\int_{x_1}^{x_2} x\eta\mu x^4 dx$. (1)

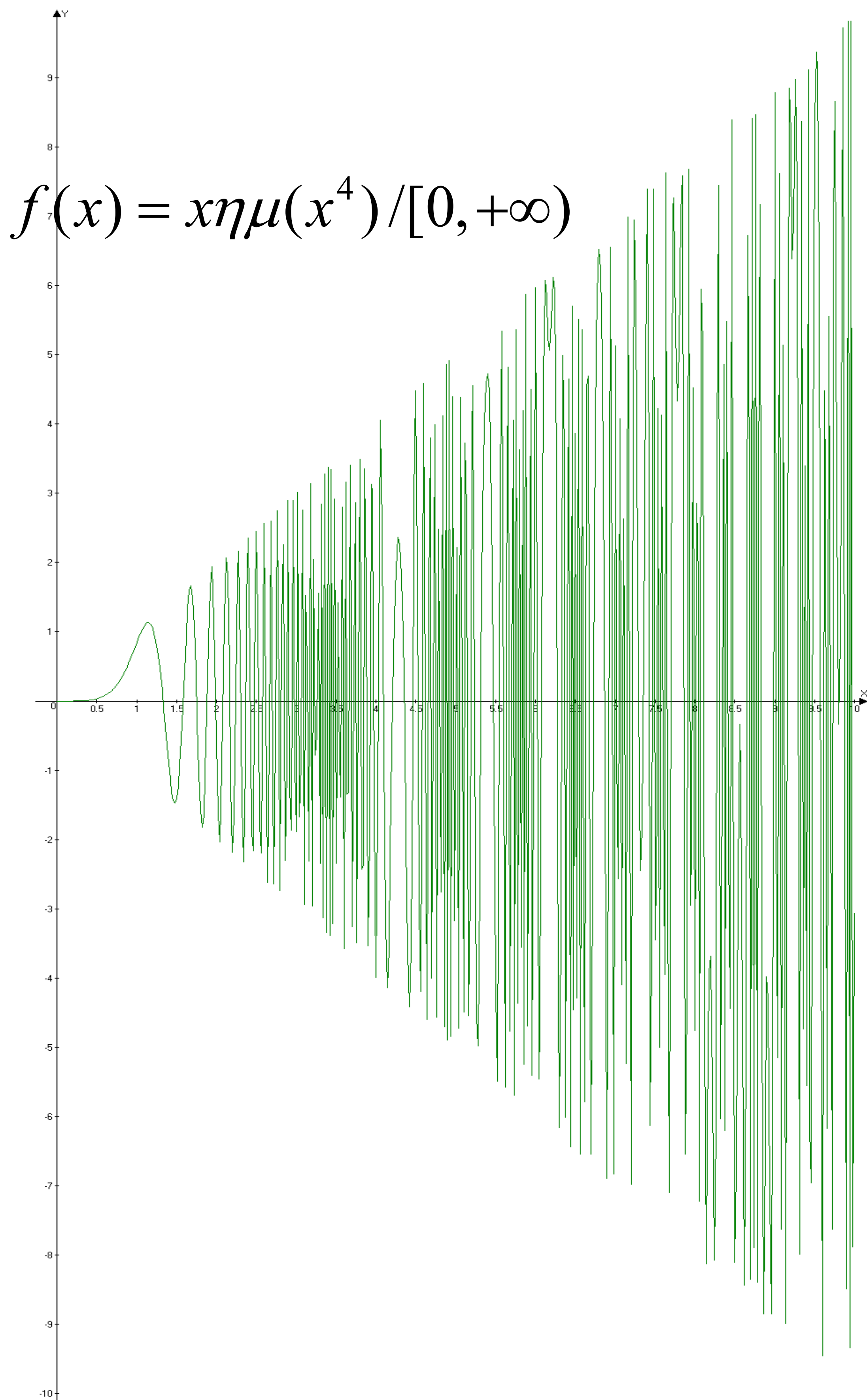
Θέτουμε $x^4 = \omega$, οπότε $4x^3 dx = d\omega \Rightarrow dx = \dfrac{d\omega}{4x^3}$ ($x \neq 0$, αφού ήδη περιοριστήκαμε στο διάστημα ολοκλήρωσης από 1 έως ∞). Έτσι, η (1) γίνεται:

$$\frac{4}{4}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{\eta\mu\omega}{\sqrt{\omega}} d\omega = -\frac{4}{4}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sqrt{\omega}}\Bigg|_{x_1^4}^{x_2^4} - \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\omega^{3/2}} d\omega = -\frac{1}{4}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu x_2^4}{x_2^3} - \frac{\sigma\upsilon\nu x_1^4}{x_1^2}\right] - \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\omega^{3/2}} d\omega.$$

Άρα

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} x\eta\mu x^4 dx\right| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1^2}\right) + \frac{1}{8}\int_{x_1^4}^{x_2^4} \frac{d\omega}{\omega^{3/2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_1^2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\right) = \frac{1}{2x_1^2} < \varepsilon \quad (2)$$

Οπότε, $\forall \varepsilon > 0$, αρκεί να διαλέγουμε $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ οπότε $(x_1 > \delta$ και $x_2 > \delta) \Rightarrow \dfrac{1}{2x_1^2} < \varepsilon$ και από την (2) θα έχω $\left|\int_{x_1}^{x_2} x\eta\mu x^4 dx\right| < \varepsilon$. Δηλαδή, το $\int_1^{\infty} x\eta\mu x^4 dx$ συγκλίνει, επομένως όπως εξηγήσαμε στην αρχή, και $\int_1^{\infty} x\eta\mu x^4 dx < +\infty$.



$$f(x) = x\eta\mu(x^4)/[0,+\infty)$$

6. Εξετάστε , αν ισχύει το αντίστροφο της προτάσεως: «Αν η f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$, τότε και $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$».

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Δεν ισχύει: Για αντιπαράδειγμα , έστω το γ.ο. $\int_\alpha^{+\infty} \left|\frac{\text{ημ}x}{x}\right| dx$. Θα δείξουμε ότι $\int_\alpha^{+\infty} \frac{\text{ημ}x}{x} dx < +\infty$, $(\alpha > 0)$ ενώ $\int_\alpha^{+\infty} \left|\frac{\text{ημ}x}{x}\right| dx = +\infty$.

(i) Για να δείξω ότι το γ.ο. $\int_\alpha^{+\infty} \frac{\text{ημ}x}{x} dx$ συγκλίνει, θα χρησιμοποιήσω το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy :

Έστω ν $\alpha < x_1 < x_2$ τότε:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\text{ημ}x}{x} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} d\text{συν}x = \frac{\text{συν}x_1}{x_1} - \frac{\text{συν}x_2}{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\text{συν}x}{x^2} dx .$$

Αν λάβουμε τα απόλυτα και των δύο μελών , με χρήση ιδιότητας των απολύτων, θα έχω:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{\text{ημ}x}{x} dx\right| \le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{|\text{συν}x|}{x^2} dx\right| \le \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x_1} < \frac{2}{x_1} .$$

Άρα αν διαλέξω ως $\delta(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon}$, τότε παρατηρώ, ότι $\forall\ x_1, x_2$ με $x_1, x_2 > \max(a, \frac{2}{\varepsilon})$ θα ισχύει $\int_\alpha^{+\infty} |\frac{\text{ημ}x}{x}|\,dx < \frac{2}{x_1} < \varepsilon$. Τότε από το κριτήριο Cauchy , έπεται ότι:

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\text{ημ}x}{x} dx < +\infty .$$

(ii) Απόδειξη ότι $\int_\alpha^{+\infty} \left|\frac{\text{ημ}x}{x}\right| dx = +\infty$:

$$\int_\alpha^{+\infty} \left|\frac{\text{ημ}x}{x}\right| dx = \int_\alpha^{+\infty} \frac{|\text{ημ}x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\text{ημ}x|}{x} dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{|\text{ημ}x|}{x} dx + \cdots + \int_{(n-1)\pi}^{2\pi} \frac{|\text{ημ}x|}{x} dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\text{ημ}x|}{x} dx . \qquad (1)$$

Αν $k \in$ Í και για $(k-1)\pi \le x \le k\pi \quad , k = 2,3,4,... \Rightarrow$

$$\frac{1}{k\pi} \le \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \frac{|\text{ημ}x|}{k\pi} \le \frac{|\text{ημ}x|}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\eta\mu x|}{x}dx \geq \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \eta\mu x dx = \frac{2}{k\pi}. \text{και άρα από (1)}$$

$$\int_{0}^{n\pi} \frac{|\eta\mu x|}{x}dx > \sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

Λαμβάνοντας τα όρια όταν $n \to +\infty$ έχω

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{|\eta\mu x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k} = +\infty. \text{ Και άρα } \int_{0}^{+\infty} \frac{|\,\eta\mu x\,|}{x}dx = +\infty.$$

Να σημειωθεί , ότι η σύγκλιση του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\eta\mu x}{x}dx$ *μπορεί να αποδειχθεί απλούστερα, με απλή εφαρμογή του κριτηρίου σύγκλισης του Dirichlet, όπου το* $\int_{1}^{+\infty} \frac{\eta\mu x}{x^p} < +\infty \quad \forall p > 0$*, άρα και για* $p = 1$.

Ειδικότερα, μπορεί να αποδειχθεί ότι $\int_{0}^{+\infty} \frac{\eta\mu x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

7. Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει, τότε όπως γνωρίζουμε, υποχρεωτικά $\alpha_n \to 0$ (ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει). Στο γενικευμένο όμως ολοκλήρωμα, δεν ισχύει κάτι ανάλογο. Δηλαδή αν το $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει, τότε δεν έπεται αναγκαστικά ότι και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ Να το δείξετε αυτό με ένα κατάλληλο παράδειγμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:Για παράδειγμα, θα θεωρήσω το $\int_{1}^{+\infty} \sigma\upsilon\nu x^2 dx$. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x^2$, δεν έχει όριο στο $+\infty$, διότι αν θεωρήσω $x_n = \sqrt{2\pi n} \to +\infty$, τότε $f(x_n) = \sigma\upsilon\nu 2\pi n = 1 \to 1$, ενώ αν θεωρήσω την $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to +\infty$, τότε $f(y_n) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \to 0$. Παρόλα αυτά, το $\int_{1}^{+\infty} \sigma\upsilon\nu x^2 dx$ συγκλίνει όπως θα δείξουμε. Θέτοντας $x^2 = t$ έχουμε:

$$\int_1^{+\infty} συνx^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{συνt}{\sqrt{t}}dt .$$

Η συνάρτηση συνt είναι συνεχής, $\int_1^x συνtdx = ημx - ημ1$ ή $|F(x)| = \left|\int_1^{+\infty} συνtdx\right| \le 2$

δηλαδή η $F(x)$ φραγμένη. Επίσης $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$, $g'(x) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^{3/2}}$ και η $g'(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Επομένως εκπληρούνται οι συνθήκες του κριτηρίου σύγκλισης του Dirichlet και έτσι το $\int_1^{+\infty} συνx^2 dx < +\infty$

Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι και το $\int_1^{+\infty} ημx^2 dx$ υπάρχει, πράγμα που θα αποδείξουμε με άλλο τρόπο και συγκεκριμένα με χρήση κριτηρίου σύγκλισης Cauchy

Έστω ε>0 . Θα δείξω ότι υπάρχει δ(ε)>0 , έτσι ώστε $|\int_{x_1}^{x_2} ημx^2 dx| < \varepsilon$, $\forall x_1, x_2 \ με \ x_2 > x_1 > \delta(\varepsilon)$.

Πράγματι:

$$\int_{\chi_1}^{\chi_2} ημx^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} t^{-\frac{1}{2}} ημt\, dx = -\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}συνt \Big|_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} - \frac{1}{4}\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} t^{-\frac{3}{2}}συνt\, dx \text{ και άρα}$$

$$|\int_{\chi_1}^{\chi_2} ημx^2 dx| \le \frac{1}{2}(\frac{1}{\chi_1}+\frac{1}{\chi_2}) + \frac{1}{4}\int_{\chi_1^2}^{\chi_2^2} t^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{\chi_1}+\frac{1}{\chi_2}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{\chi_1}-\frac{1}{\chi_2}) = \frac{1}{\chi_1}$$

Αν πάρουμε δ(ε)=$\frac{1}{\varepsilon}$, τότε ισχύει

$$|\int_{\chi_1}^{\chi_2} ημx^2 dx| < \varepsilon \quad \forall\ \chi_1, \chi_2 \ με \ \ \chi_2 > \chi_1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Από το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy , έπεται, ότι υπάρχει το γ.ο. $\int_1^{+\infty} ημx^2 dx$

Να σημειωθεί, ότι όταν $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ *και το* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *υπάρχει, τότε αναγκαστικά* $\ell = 0$.

Δηλαδή το $\ell \neq 0$ *αποτελεί ικανή συνθήκη μη σύγκλισης του γενικευμένου ολοκληρώματος* $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$.

Αν όμως $\ell = 0$, *αυτό δεν αποτελεί ικανή συνθήκη σύγκλισης του* $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$, *αφού αν θεωρήσω* $f(x) = \frac{1}{x}$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, *αλλά* $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty \ (\alpha > 0)$.

8. Το ολοκληρωτικό κριτήριο του Cauchy αναφέρει ότι αν μια συνάρτηση f **είναι θετική, φθίνουσα και συνεχής στο** $[1,+\infty)$**, τότε η σειρά** $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ **και το** $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ **συμπεριφέρονται ομοιοτρόπως:**

Όταν συγκλίνει η σειρά συγκλίνει και το ολοκλήρωμα, όταν απειρίζεται η σειρά, απειρίζεται και το ολοκλήρωμα και αντιστρόφως.

Να αποδειχθεί ότι η υπόθεση ότι η f **είναι θετική, είναι απολύτως ουσιώδης ώστε ισχύει το συμπέρασμα.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \text{ημ}x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\text{συν}x\right]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

όμως $\int_{0}^{+\infty} \text{ημ}x dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_{0}^{\beta} \text{ημ}x dx = \lim_{\beta\to+\infty} (1 - \text{συν}\beta)$ που δεν υπάρχει. (βλ. Β.4.1.3.ε))

Να σημειωθεί όμως, ότι όταν η f αλλάξει άπειρες φορές πρόσημο στο διάστημα $[1,+\infty)$, τότε η σύγκλιση του $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$, συνεπάγεται την σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, με $\alpha_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$, όπου x_n αύξουσα ακολουθία με $x_n \to +\infty$.

9. Υπάρχουν συναρτήσεις ***f*, *g*, *h*, *φ*:**

(i) **η** $f\,/[\alpha,\beta)$ **και το** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **υπάρχει**

(ii) η $g/[\alpha,\beta)$ **και το** $\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$ **είναι άπειρο**

(iii) η $h/(\alpha,\beta)$ **και το** $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx$ **είναι άπειρο**

(iv) η $\varphi/[\alpha,\beta]\setminus\{x_0\}$ **και το** $\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)dx$ **δεν υπάρχει.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

(i) $$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}dx = \lim_{\lambda\to 3^-}\int_0^{\lambda}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\lambda\to 3^-}\left(\text{τοξ ημ}\frac{x}{3}\right]_0^{\lambda} = \lim_{\lambda\to 3^-}\left[\text{τοξ ημ}\frac{\lambda}{3} - \text{τοξ ημ}0\right]$$

$$= \lim_{\lambda\to 3^-}\text{τοξ ημ}\frac{\lambda}{3} = \text{τοξ ημ}1 = \frac{\pi}{2}$$

(ii) $$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\lambda\to 2^-}\int_0^{\lambda}\frac{dx}{2-x} = \lim_{\lambda\to 2^-}\ln\frac{1}{2-x}\Big]_0^{\lambda} = \lim_{\lambda\to 2^-}\left[\ln\frac{1}{2-\lambda} - \ln\frac{1}{2}\right] = +\infty$$

(iii) $$\int_0^1 \frac{dx}{x\log x} = \int_0^{\gamma}\frac{dx}{x\log x} + \int_{\gamma}^1\frac{dx}{x\log x} = \lim_{k\to 0+}\int_k^{\gamma}\frac{dx}{x\log x} + \lim_{\lambda\to 1^-}\int_{\gamma}^1\frac{dx}{x\log x}$$

$$= \lim_{k\to 0^+}\log|\log x\|_k^{\gamma} + \lim_{\lambda\to 1^-}\log|\log x\|_{\gamma}^{\lambda} = -\infty .$$

(iv) $$\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\lambda\to 1^+}\int_0^{\lambda}\frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{k\to 1^+}\int_k\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{\lambda\to 1^-}\frac{-1}{x-1}\Big]_0^{\lambda} + \lim_{k\to 1^+}\frac{-1}{x-1}\Big]_k^4 \equiv +\infty + \infty = +\infty .$$

10. Ως γνωστόν, «Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ **Ñ και η** f **είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η** f^2 **είναι ολοκληρώσιμη». Να εξεταστεί αν ισχύει η ίδια ιδιότητα για το γενικευμένο ολοκλήρωμα.**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι, όπως φαίνεται από το ακόλουθο αντιπαράδειγμα:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx < +\infty , \quad \text{όμως} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} = +\infty .$$

19. ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ Ñ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

Ο.1. ***Ρητός:*** Είναι κάθε αριθμός που μπορεί να γραφεί ως κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ με $\mu,\nu \in \mathbb{Z}\ \ \textit{και}\ \ \nu \neq 0$, δηλ. κάθε στοιχείο του συνόλου $\mathbb{Q}$

Ο.2. ***Άρρητος:*** .Είναι κάθε πραγματικός που δεν είναι ρητός , δηλ. κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Ο.3. ***Αλγεβρικός:*** Είναι κάθε πραγματικός που μπορεί να είναι ρίζα μη μηδενικού πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές.

Ο.4. ***Υπερβατικός:*** Είναι κάθε πραγματικός που δεν είναι αλγεβρικός.

Ο.5. ***Πυκνό σύνολο:*** Ένα σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι πυκνό, αν για κάθε δύο πραγματικούς α<β , υπάρχει $\gamma \in X: \quad \alpha < \gamma < \beta$

Ο.6. ***Άνω φραγμένο σύνολο*** $A \subseteq$ Ñ **:** Όταν $\exists \alpha \in$ Ñ $: x \leq \alpha,\ \forall x \in A$.Το α λέγεται **ένα άνω φράγμα του Α**

Ο.7. ***Κάτω φραγμένο σύνολο*** $A \subseteq$ Ñ**:** Όταν $\exists \beta \in \mathbb{R}: x \geq \beta, \quad \forall x \in A$.Το β λέγεται **ένα κάτω φράγμα του Α**

Ο.8. ***Φραγμένο σύνολο*** $A \subseteq$ Ñ**:** Όταν το Α είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Ο.9. ***Supremum*** *ενός συνόλου Α:* Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Ο α είναι ελάχιστο άνω φράγμα ή supremum του Α αν

(i) Το α είναι άνω φράγμα του Α και

(ii) Αν το β είναι ένα άνω φράγμα του Α , τότε $a \leq \beta$

Ο.10. ***Infimum*** *ενός συνόλου Α:* Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Ο α είναι μέγιστο κάτω φράγμα ή infimum του Α αν

(i) Το α είναι κάτω φράγμα του Α και

(ii) Αν το β είναι ένα κάτω φράγμα του Α , τότε $\beta \leq \alpha$

Ο.11. ***Περιοχή με κέντρο*** x_0 ***και ακτίνα ε,*** είναι το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = S(x_0, \varepsilon), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0$.

Ο.12. ***Ανοικτό σύνολο***, υποσύνολο του Ñ. Ονομάζεται κάθε σύνολο *A*, για το οποίο ισχύει: $x \in A \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Ο.13. ***Κλειστό σύνολο***, υποσύνολο του Ñ. Ονομάζεται κάθε σύνολο *A*, του οποίου το συμπλήρωμα Ñ $\setminus A$ είναι ανοικτό.

Ο.14. ***Εσωτερικό σημείο συνόλου*** $A \subseteq$ **Ñ.** Ονομάζεται ένα σημείο $x \in A$, αν υπάρχει περιοχή του $x : S(x, \varepsilon) \subset A$.

Ο.15. ***Σημείο συσσώρευσης* (ή οριακό σημείο) του** ***A***: Έστω $\chi \in \mathbb{R}$ και $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$. Το χ θα λέγεται σημείο συσσώρευσης του Α , όταν $[S(\chi, \varepsilon) \setminus \{\chi\}] \cap A \neq \varnothing$, $\forall \varepsilon > 0$.

Ο.16. ***Μεμονωμένο σημείο του A:*** Όταν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του *A*.

Ο.17. ***Εσωτερικό συνόλου A***: Ονομάζεται το σύνολο των εσωτερικών σημείων του *A* και συμβολίζεται με $\overset{\circ}{A}$.

Ο.18. ***Παράγωγο σύνολο του A:*** Ονομάζεται το σύνολο των σ.σ. του *A* και συμβολίζεται με A'.

Ο.19. ***Κλειστότητα ή θήκη του A:*** Ονομάζεται το $\overline{A} = A \cup A'$.

Ο.20. ***Αριθμήσιμο σύνολο***: Κάθε σύνολο του οποίου τα στοιχεία μπορούν να τεθούν σε $1-1$ και επί απεικόνιση με το Í .

Ο.21. ***Υπεραριθμήσιμο:*** Κάθε απειροσύνολο, που δεν είναι αριθμήσιμο.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

$Α_1$: **Αρχιμήδους–Ευδόξου**: Αν $x \in$ Ñ$^*_+$ και $y \in$ Ñ, τότε $\exists n \in$ Í $: nx > y$.

$Α_2$: **Αξίωμα της πληρότητας του Ñ ή Αξίωμα του συνεχούς στο Ñ:** Κάθε άνω φραγμένο (αντ. κάτω φραγμένο) μη κενό υποσύνολο του Ñ έχει supremum (αντ. infimum).

$Π_1$: **Αρχή καλής διάταξης**: Κάθε μη κενό υποσύνολο του Í περιέχει ελάχιστο στοιχείο.

$Π_2$: **Ανισότητα Bernoulli**: Αν $\alpha > -1$, τότε $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

$Π_3$: Κάθε πραγματικός μη αρνητικός αριθμός *x*, έχει μοναδική *ν*-οστή ρίζα.

$Π_4$: Το Ð είναι διατεταγμένο, πυκνό και αριθμήσιμο σύνολο.

$Π_5$: Το Ñ – Ð είναι διατεταγμένο, πυκνό και υπεραριθμήσιμο σύνολο.

$Π_6$: Κάθε πραγματικός αριθμός, έχει μοναδικό δεκαδικό ανάπτυγμα του οποίου τα ψηφία δεν είναι από κάποια θέση και πέρα όλα 9.

2. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

O_1: ***Ακολουθία πραγματικών αριθμών*** είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με τον ειδικότερο συμβολισμό $f(n) = \alpha_n \in \mathbb{R}$ για τις εικόνες, ενώ την ίδια την ακολουθία συμβολίζουμε με $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, ...$ ή $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ή (α_n) ή και (καταχρηστικά) α_n.

O_2: ***Υπακολουθία πραγματικών αριθμών:*** Έστω (α_n) μία ακολουθία. Έστω επίσης $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών. Συμβολικά $\mathbb{N} \ni k \xrightarrow{\varphi} \varphi(k) = n_k$. Τότε η ακολουθία (a_{n_k}) λέγεται υπακολουθία της (a_n). Πιο απλά, μια υπακολουθία της (α_n) είναι μια ακολουθία της μορφής $(a_{k_1}, a_{k_2}, ..., \alpha_{k_n}, \alpha_{k_{n+1}}, ...)$ όπου $k_1 < k_2 < ... < k_n < k_{n+1} < ...$.

O_3: ***Οριακός αριθμός ακολουθίας*** $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$*:* Έτσι λέγεται ένα στοιχείο του $\overline{\mathbb{R}}$, όταν σε κάθε περιοχή του, υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας. Δηλ. το ξ είναι σ.σ. του συνόλου τιμών των όρων της (α_n).

O_4: ***Η έννοια του "τελικά":*** Χρησιμοποιούμε την έννοια του "τελικά", όταν μία ιδιότητα (ή πρόταση) ισχύει (ή είναι αληθής) $\forall n > n_0$, όπου n_0 ένας συγκεκριμένος φυσικός.

O_5: ***Φραγμένη ακολουθία*** $(\alpha_n) \Leftrightarrow \exists \varphi, \Phi \in \mathbb{R} : \varphi \le a_n \le \Phi, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

O_6: ***Άνω φραγμένη ακολουθία*** $(\alpha_n) \Leftrightarrow \exists \Phi \in \mathbb{R} : a_n \le \Phi, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

O_7: ***Κάτω φραγμένη ακολουθία*** $(\alpha_n) \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} : \varphi \le a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

O_8: ***Απολύτως φραγμένη ακολουθία*** $(\alpha_n) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}^+ : |\alpha_n| \le \theta, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

O_9: ***Συγκλίνουσα ακολουθία*** (a_n) στον

$a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\alpha_n - \alpha| < \varepsilon, \ \forall n > n_0)$

O_{10}: ***Αποκλίνουσα ακολουθία*** (α_n)*:* Όταν δεν είναι συγκλίνουσα.

O_{11}: ***Συγκλίνουσα στο*** $+\infty$ ***ακολουθία*** $(\alpha_n) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \alpha_n > \varepsilon, \forall n > n_0)$.

O_{12}: ***Συγκλίνουσα στο*** $-\infty$ ***ακολουθία*** $(a_n) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \alpha_n < -\varepsilon \ \forall n > n_0)$.

O_{13}: ***Άνω όριο (lines superior) μιας ακολουθίας*** (α_n)***:*** Αν (a_n) φραγμένη ακολουθία, θέτουμε $\beta_n = \sup\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, ...\}$. Τότε ορίζουμε και

συμβολίζουμε ως άνω όριο (limes superior) το: $\overline{\lim}\alpha_n := \lim_n \sup \alpha_n := \inf \beta_n = \left(\inf_n \sup_{k \geq n} \alpha_k \right)$. Με άλλη διατύπωση, το $\overline{\lim}\alpha_n$ είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός οριακός αριθμός της α_n.

O14: ***Κάτω όριο (limes inferior)*** *μιας ακολουθίας* (α_n)*:* Αν (α_n) φραγμένη, θέτουμε $\gamma_n = \inf\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, ...\}$. Τότε ορίζουμε και συμβολίζουμε ως κάτω όριο (limes inferior) $\underline{\lim}\alpha_n := \lim_n \inf \alpha_n := \sup_n \gamma_n = \left(\sup_n \inf_{k \geq n} \alpha_k \right)$. Με άλλη διατύπωση, το $\underline{\lim}\alpha_n$ είναι ο μικρότερος πραγματικός οριακός αριθμός της α_n.

O15: ***Βασική (ή ακολουθία Cauchy):*** Η ακολουθία (α_n), είναι βασική, αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in$ Í $: |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon, \ \forall n, m > n_0$.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ–ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ.

Π1: ***Μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας***: Όταν μία ακολουθία συγκλίνει, το όριο είναι μοναδικό.

Π2: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Π3: Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

Π4: Κάθε ακολουθία πραγματικών, περιέχει μονότονη υπακολουθία.

Π5: ***Bolzano–Weierstrass***: Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Π6: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι βασική και αντιστρόφως.

Π7: Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη.

3. ΣΕΙΡΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ο$_1$: ***Σειρά:*** Έστω (α_n) μία ακολουθία. Θέτουμε $S_n = a_1 + \alpha_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Το σύμβολο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι η σειρά με n-οστό όρο τον α_n και n-οστό μερικό άθροισμα το S_n.

Ο$_2$: ***Συγκλίνουσα σειρά***: Όταν $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n \in$ Ñ.

Ο$_3$: ***Άθροισμα σειράς***: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Ο$_4$: ***Αποκλίνουσα σειρά***: Όταν δεν είναι συγκλίνουσα.

Ο$_5$: ***Συγκλίνουσα στο $+\infty$ ή $-\infty$ σειρά***: Όταν $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ ή $-\infty$.

Ο$_6$: ***Συγκλίνουσα απόλυτα σειρά:*** Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απόλυτα, όταν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ συγκλίνει.

Ο$_7$: **Συνέλιξη ή γινόμενο κατά Cauchy δύο ακολουθιών** (α_n) (β_n)**.** Είναι η ακολουθία $(\gamma_n): \gamma_n = \alpha_n\beta_0 + \alpha_{n-1}\beta_1 + \cdots + \alpha_0\beta_n$.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΚΥΡΙΟΤΕΡΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΣΕΙΡΩΝ

Π$_1$: Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη.

Π$_2$: Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n \to 0$.

Π$_3$: ***Κριτήριο φράγματος:*** Αν a_n ακολουθία μη αρνητικών όρων, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η S_n είναι άνω φραγμένη.

Π$_4$: ***Κριτήριο Cauchy:*** Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in$ Í $: | a_{m+1} + \alpha_{m+2} + \cdots + a_n | < \varepsilon \ \forall n > m > n_0$.

Π$_5$: Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα και η (β_n) είναι φραγμένη, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Π$_6$: ***Κριτήριο Leibnitz:*** Αν η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων, και $a_n \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγκλίνει.

Π$_7$: ***Κριτήριο Dirichlet****:* Αν $(\alpha_n), (\beta_n)$ δύο ακολουθίες ώστε $|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ η (β_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων και $\beta_n \to 0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n$ συγκλίνει.

Π$_8$: ***Κριτήριο Abel*** (πόρισμα προηγούμενου): Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και (β_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n$ συγκλίνει.

Π$_9$: ***Κριτήριο Σύγκρισης****:* Αν $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε:

(i) Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

(ii) Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει και η $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ αποκλίνει.

Π$_{10}$: ***Κριτήριο ρίζας του Cauchy****:* Αν (a_n) ακολουθία και $\overline{\lim \sqrt[n]{|\alpha_n|}} = \rho$, τότε:

(i) $0 \leq \rho < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα

(ii) $\rho > 1$ τότε η σειρά αποκλίνει

(iii) $\rho = 1$ δεν αποφαίνεται το κριτήριο.

Π$_{11}$: ***Κριτήριο λόγου d'Alebert****:* Έστω (a_n) ακολουθία με $\alpha_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Αν $\rho = \overline{\lim}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$ και $\theta = \underline{\lim}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$ τότε:

(i) $0 \leq \rho < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

(ii) $\theta > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Π$_{12}$: Αν $(\alpha_n), (\beta_n)$ ακολουθίες τότε:

(i) Αν $\overline{\lim}\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right) < +\infty$ και η $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

(ii) Αν $\underline{\lim}\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right) > 0$ και η $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ αποκλίνει τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Π$_{13}$: ***Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy:*** Αν η (α_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Π$_{14}$: ***Meterns:*** Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνουν και μία εκ των δύο απολύτως, τότε αν (γ_n) η συνέλιξη των $(\alpha_n), (\beta_n)$ η $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

Π$_{15}$: ***Abel:*** Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ συγκλίνουν και η (γ_n) είναι η συνέλιξη των $(\alpha_n), (\beta_n)$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$.

4. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ο$_1$: ***Διμελής σχέση R από το A στο B**:* Είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$.

Ο$_2$: ***Συνάρτηση:*** Μια διμελής σχέση $f \subset X \times Y$ από το *X* στο *Y* και η οποία συμβολίζεται $f : X \to Y$, για τη οποία $\forall x \in X$, υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ ώστε $(x, y) \in f$.

Ο$_3$: ***Πεδίο ορισμού συνάρτησης:*** Το $X := \mathrm{D}(f)$ του προηγούμενου ορισμού.

Ο$_4$: ***Πεδίο τιμών συνάρτησης**:* $R(f)$ ή $f(x) = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$.

O$_5$: ***Συνάρτηση επί:*** Όταν $f: X \to Y$, αν $f(x) = Y$ ή $\forall y \in Y$, $\exists x \in X: y = f(x)$.

O$_6$: ***Συνάρτηση*** $1-1$***:*** Αν $f: X \to Y$ και $x_1, x_2 \in X$ και $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδυνάμως $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

O$_7$: ***Σύνθεση συναρτήσεων*** $g \circ f$***:*** Αν $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$ δύο συναρτήσεις (ώστε το πεδίο ορισμού *Y* της *g* περιέχει το σύνολο τιμών $f(X)$ της *f*). Η σύνθεση της *f* με την *g* είναι η συνάρτηση $(g \circ f): X \to Z$ με $(g \circ f) := g(f(x)), \forall x \in X$.

O$_8$: ***Αύξουσα συνάρτηση f:*** Αν $\forall x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

O$_9$: ***Γνησίως αύξουσα συνάρτηση*** *f:* Αν $\forall x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

O$_{10}$: ***Φθίνουσα συνάρτηση f***: Αν $\forall x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

O$_{11}$: ***Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f***: Αν $\forall x, y \in X$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

O$_{12}$: ***Μονότονη συνάρτηση f:*** Αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

O$_{13}$: ***Γνησίως μονότονη συνάρτηση f***: Αν είναι γν. αύξουσα ή γν. φθίνουσα.

O$_{14}$: ***Άνω φραγμένη συνάρτηση f***: Αν το σύνολο τιμών της *f* είναι άνω φραγμένο σύνολο.

O$_{15}$: ***Κάτω φραγμένη συνάρτηση f***: Αν το σύνολο τιμών της *f* είναι κάτω φραγμένο σύνολο.

O$_{16}$: ***Φραγμένη συνάρτηση f:*** Αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

O$_{17}$: ***Αντίστροφη συνάρτηση*** f^{-1} ***της*** f***:*** Αν $f: X \to Y$ είναι $1-1$ τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f, $f^{-1}: f(x) \to X$ με τον κανόνα $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

O$_{18}$: ***Άρτια συνάρτηση:*** Αν $f: X \to Y$ και $(x \in X) \Rightarrow (-x \in X)$ και $f(x) = f(-x))$.

O$_{19}$: ***Περιττή συνάρτηση*** f***:*** Αν $f: X \to Y$ και $(x \in X) \Rightarrow (-x \in X$ και $f(x) = -f(x)$).

O$_{20}$: ***Περιοδική συνάρτηση*** f***:*** Αν $f: X \to Y$ και $\exists T > 0: (x \in X) \Rightarrow (x + T \in X$ και $f(x) + T) = f(x))$.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Π$_1$: Αν $f: X \to$ Ñ γνησίως μονότονη συνάρτηση τότε

(i) Υπάρχει η αντίστροφη $f^{-1}: f(X) \to \mathbb{R}$

(ii) Η f^{-1} είναι γν. αύξουσα αν και μόνο αν η f γν. αύξουσα.

(iii) Η f^{-1} είναι γν. φθίνουσα αν και μόνο αν η f γν. φθίνουσα.

5. ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ο$_1$: ***Πεπερασμένο όριο συνάρτησης*:** Λέμε ότι για $x \to x_0$ $(x \neq x_0,\ x_0 \in \mathbb{R})$ η συνάρτηση $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, όταν

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \ (\delta = \delta(x_0, \varepsilon)) : \alpha\nu \ \ x \in X \ \ \kappa\alpha\iota \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon .$$

Ο αριθμός *l*, λέγεται όριο της $f(x)$ καθώς $x \to x_0$.

Ο$_2$: ***Γενικός ορισμός ορίου όταν*** $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ***και*** $l \in \overline{\mathbb{R}}$ **:** Αν $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι σ.σ. του $D(f)$, τότε το $l \in \overline{\mathbb{R}}$ είναι όριο της συνάρτησης $f: D(f) \to \mathbb{R}$ όταν: Για κάθε περιοχή U του *l*, υπάρχει περιοχή V του $x_0 : \forall x \in D(f) \cap V$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in U$.

Ο$_3$: ***Ακολουθιακός ορισμός σύγκλισης*:** Λέμε ότι η συνάρτηση *f* έχει στο σ.σ. x_0 του πεδίου ορισμού της όριο *l*, όταν και μόνο όταν $\forall$ ακολουθία x_n με ($x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$) να έχω $f(x_n) \to l$.

Ο$_4$: ***Απειροστή συνάρτηση:*** Η συνάρτηση $y = f(x)$, $x \in A$, λέγεται απειροστή για $x \to x_0$, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Π$_1$: Αν μια συνάρτηση *f* έχει πεπερασμένο όριο όταν $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ τότε η *f* είναι φραγμένη σε περιοχή του x_0.

Π$_2$: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$, τότε υπάρχει περιοχή του x_0, στην οποία η $f(x)$ διατηρεί το πρόσημο του *l*.

Π$_3$: Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ ($|+\infty| := +\infty$ και $|-\infty| := +\infty$).

Π4: ***Ικανή και αναγκαία συνθήκη για ύπαρξη πεπερασμένου ορίου:*** Αν $x \to x_0$, x_0 σ.σ. του πεδίου ορισμού της *f*, τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη . για να υπάρχει πεπερασμένο όριο στο x_0 είναι: ($\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει περιοχή V του $x_0 : \forall x_1, x_2 \in (V \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Π5: Αν $f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$ στη περιοχή του x_0, με x_0 σ.σ. του κοινού συνόλου ορισμού τους *A*, και υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \to x_0} f_1(x)$, $\lim_{x \to x_0} f_2(x)$, και είναι ίσα, με *α*, τότε $\lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha$.

Π6: Αν για $x \to x_0$ η $y = f(x)$ είναι απειροστή, τότε η συνάρτηση $\frac{1}{|f(x)|} \to +\infty$, αν $f(x) \neq 0$ σε περιοχή του x_0.

Π7: Απειροστή επί φραγμένη δίνει απειροστή.

6. ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

Ο1: ***Συνεχής συνάρτηση*** : Έστω $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση και $x_0 \in X$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0, αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *ωστε αν* $\chi \in \mathrm{X}$ *και* $: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ο2: ***Συνεχής συνάρτηση*** f, ***στο*** $x_0 \in \mathrm{X}$ ***και*** x_0 ***σ.σ. του X :*** Όταν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ο3: ***Ακολουθιακός ορισμός του ορίου:*** Η f συνεχής στο $x_0 \in \mathrm{X}$ όταν για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.

Ο4: ***Συνεχής επέκταση της συνάρτησης :*** Έστω $X \subset Y$ και $f : X \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g : Y \to \mathbb{R}$, είναι μία επέκταση της f στο Y αν $g(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

Ο5: ***Περιορισμός συνάρτησης :*** Στον προηγούμενο ορισμό, η f είναι ο περιορισμός της g στο X και συμβολίζουμε *f*=*g*|*X*

Ο6: ***Συνεχής συνάρτηση:*** Όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

O$_7$: ***Ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση:*** Έστω $f : A \to$ Ñ. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Α αν $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ (που εξαρτάται μόνο από το ε) ώστε αν $x, y \in A$ και $| x - y | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(y) | < \varepsilon$.

O$_8$: ***Συνθήκη Lipschitz για συνάρτηση***: Θα λέμε ότι η $f : A \to$ Ñ ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz με σταθερά κ όταν $\exists k \geq 0 : | f(x) - f(y) | \leq k | x - y |, \quad \forall x, y \in A$.

O$_9$: ***Συνάρτηση συστολής:*** Αν $f : A \to$ Ñ και η f ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz για $0 < k < 1$, τότε λέγεται συνάρτηση συστολής.

O$_{10}$: ***Αιρόμενη ασυνέχεια ή άρσιμη ασυνέχεια ή υπό άρσιν ασυνέχεια ή ασυνέχεια α΄ είδους***: Όταν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$.

O$_{11}$: ***Ασυνέχεια β΄ είδους στο*** x_0**:** Όταν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

O$_{12}$: ***Πήδημα συνάρτησης σε σημείο*** x_0**:** Είναι ο αριθμός

$$\pi\eta\delta f_{x_0} = | \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x) | \neq 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ:

Π$_1$: Έστω συνάρτηση $f : A \to$ Ñ. Τότε ισχύουν: Αν f συνεχής σε σημείο $x_0 \in X$, τότε είναι και τοπικά φραγμένη σε μια περιοχή του x_0, δηλ. $\exists \; \delta > 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \mathrm{M} > 0$ ώστε $| f(x) | \leq M \quad , \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathrm{X}$.

Π$_2$: Αν $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 και $g : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 τότε και οι συναρτήσεις $f \pm g$, $f \cdot \mathrm{g}$, $\frac{f}{g}$ είναι συνεχείς στο x_0 $(g(x_0) \neq 0)$.

Π$_3$: Αν $f : X \to Y \;\; \kappa\alpha\iota \;\; g : Y \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $x_0 \in X$, τότε και η σύνθεσή τους $g \circ f : X \to \mathbb{R}$, είναι συνεχής στο x_0.

Π$_4$: Αν $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f είναι:

(i) Φραγμένη

(ii) Ομοιόμορφα συνεχής

(iii) Λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Θ5: ***Weierstrass:*** Μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο φραγμένο και κλειστό $[\alpha,\beta]$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$.

Θ6: ***Bolzano:*** Αν $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(a)\cdot f(\beta)<0$, τότε $\exists x_0\in(\alpha,\beta): f(x_0)=0$.

Θ7: ***Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών:*** Αν $f(x)$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\neq f(y)$ για $x,y\in[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(x)$, $f(y)$ για τιμές του $[\alpha,\beta]$.

Π8: Αν η f είναι μη σταθερή και συνεχής συνάρτηση στο διάστημα *Δ*, τότε το $f(\Delta)$ είναι διάστημα.

Π9: Αν $f:\Delta\to$ Ñ και η f μονότονη και $f(\Delta)$ διάστημα, τότε η f είναι συνεχής στο *Δ*.

Π10: Αν $f:$ Ñ $\to$ Ñ, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Η f συνεχής στο Ñ

(ii) Η αντίστροφη εικόνα τυχαίου κλειστού υποσυνόλου του Ñ είναι κλειστό στο Ñ.

(iii) Η αντίστροφη εικόνα τυχαίου ανοικτού υποσυνόλου του Ñ είναι ανοικτό στο Ñ.

Π11: Έστω $f:\Delta\to\mathbb{R}$ μια $1-1$ και συνεχής συνάρτηση στο Δ (Δ:=διάστημα του $\mathbb{R}$). Τότε η *f* είναι γνησίως μονότονη και η $f^{-1}: f(\Delta)\to\mathbb{R}$, είναι συνεχής.

7. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

Ο1: ***Παραγωγίσιμη συνάρτηση σε σημείο*** x_0***:*** Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, Α είναι ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $x_0\in A$ και σ.σ. του *A*, τότε αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει, η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0.

O$_2$: ***Παράγωγος στο*** x_0**:** Λέγεται ο αριθμός $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

εφόσον φυσικά υπάρχει το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

O$_3$: ***Συμμετρική παράγωγος της f*** **στο** x_0**:** Είναι ο αριθμός

$f_5'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$, εφόσον υπάρχει.

O$_4$: **Αριστερή παράγωγος στο** x_0**:** Ο αριθμός

$f_\alpha'(x_0) = f_-'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, εφόσον υπάρχει.

O$_5$: ***Δεξιά παράγωγος στο*** x_0**:** Ο αριθμός

$f_\delta(x_0) = f_+'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

O$_6$: ***Παράγωγος συνάρτηση:*** Αν $f : X \to \mathbb{R}$ και $A \subseteq X$ το σύνολο που η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση $f' : A \to$ Ñ $: f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $\forall x \in A$ λέγεται παράγωγος συνάρτηση της f.

Αναλόγως ορίζονται παράγωγοι ανωτέρα τάξης μέσω αναδρομικότητας $f''(x) = f'(x))'$ κ.ο.κ.

$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' \forall x$ σε κατάλληλο σύνολο που η $f^{(n-1)}$ είναι παραγωγίσιμη.

O$_7$: ***Διαφορικό της*** f ***στο*** x***, με αύξηση*** h**:** Αν $f : X \to \mathbb{R}$, $A \subseteq X$ και είναι παραγωγίσιμη για $\forall x \in A \subseteq X$, τότε η συνάρτηση $df : A \times$ Ñ $\to$ Ñ με $df(x)(h) = f'(x) \cdot h$, $x \in A$, $h \in$ Ñ, λέγεται διαφορικό της f στο x, με αύξηση h.

O$_8$: ***Γενικός ορισμός ασύμπτωτης*****:** Μία ευθεία (ε) λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, αν και μόνο αν η απόσταση του M (που ανήκει στο γράφημα της f) από την ευθεία (ε) τείνει στο 0, όταν το M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων.

O_9: ***Κατακόρυφη ασύμπτωτη***: Η ευθεία $x = a$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης f, αν και μόνο αν συμβαίνει ένα τουλάχιστον από τα επόμενα:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ή $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

O_{10}: ***Πλάγια ασύμπτωτη:*** Η ευθεία $y = \lambda x + \mu$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, αν και μόνο αν συμβαίνει ένα τουλάχιστον από τα παρακάτω: $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - \lambda x - \mu) = 0$ ή $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \lambda x - \mu) = 0$. Από τον ορισμό προκύπτει ότι όταν υπάρχουν τα λ, μ δίνονται από τους τύπους $\lambda = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\mu = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - \lambda\mu)$.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Π_1: Έστω $a < \beta$ και $f : (a, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\chi_o \in (\alpha, \beta)$.Τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Π_2: Η παράγωγος συνάρτησης σε σημείο x_0 όταν υπάρχει, είναι μοναδική.

Π_3: **Θεώρημα Rolle:** Έστω $f : [\alpha, \beta] \to Ñ$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$. Τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta) : f'(x_0) = 0$.

Π_4: **Πόρισμα Θ.Rolle**.Αν $f : [\alpha, \beta] \to Ñ$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = 0$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$, τότε $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

Π_5: **Μία Ιδιότητα που έχει συνάρτηση σε σημείο x_0, μεταφέρεται σε διάστημα που περιέχει το σημείο:**

Έστω $f : [\alpha, \beta] \to Ñ$ και η f παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε:

(i) Αν $f'(x_0) > 0$, υπάρχει $\delta > 0 : f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ και $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

(ii) Αν $f'(x_0) < 0$, υπάρχει $\delta > 0 : f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Π$_6$: ***Darboux:*** Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(\alpha)\neq f'(\beta)$, τότε η f' παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f'(\alpha),\ f'(\beta)$, στο διάστημα (α,β).

Θ$_6$: ***Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange):*** Έστω $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta):\ f(\beta)-f(\alpha)=(\beta-\alpha)f'(x_0)$.

Π$_7$: Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα *Δ*, τότε

(i) Η f αύξουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν, $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in \Delta$

(ii) Η f φθίνουσα στο *Δ*, αν και μόνο αν, $f'(x)\leq 0,\ \forall x\in \Delta$.

Π$_8$: Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα *Δ*, τότε αν $f'(x)>0$, $\forall x\in\Delta$, η f είναι γνησίως αύξουσα (ανάλογη πρόταση, αν $f'(x)<0$, η f είναι γν. φθίνουσα).

Θ$_9$: ***Θεώρημα Μέσης Τιμής Cauchy**:* Έστω $f,\ g$ δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) με $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. Τότε

$$\exists x_0\in(\alpha,\beta):\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Π$_{10}$: ***Κανόνες L' Hospital***

1. Αν οι συναρτήσεις $f,\ g$ είναι:

   (i) συνεχείς στο $[x_0-h,x_0+h],\ h>0$

   (ii) παραγωγίσιμες στο $[x_0-h,x_0+h]\setminus\{x_0\}$

   (iii) ισχύει $f(x_0)=g(x_0)=0$

   (iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda\in\overline{\text{Ñ}}$.

   Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)=\lambda}$.

2. Αν οι συναρτήσεις $f,\ g$ είναι

   (i) παραγωγίσιμες στο $[x_0-h,x_0+h]\setminus\{x_0\},\ h>0$

   (ii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

   (iii) $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in[x_0-h,x_0+h]\setminus\{x_0\}$

Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathrm{N}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι:

   (i) συνεχείς στο διάστημα $[x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$

   (ii) παραγωγίσιμες στο $[x_0 - h, x_0 + h] \setminus \{x_0\}$

   (iii) ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$

   (iv) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathrm{N}}$.

Τότε $\lim \frac{f(x)}{g(x) = \lambda}$.

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι:

   (i) παραγωγίσιμες στο $[x_0 - h, x_0 + h] \setminus \{x_0\}$

   (ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$

   (iii) $g'(x) \neq 0, \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h] \setminus \{x_0\}$.

Τότε ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathrm{N}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Π_{11}: ***Fermat:*** Αν η f είναι ορισμένη στο (α, β), αν στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έχουμε ακρότατο και αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β), τότε $f'(x_0) = 0$.

Π_{12}: ***Test της α' παραγώγου για max και min****:* Αν η συνάρτηση f είναι:

1. Συνεχής στο x_0
2. Με ή χωρίς παράγωγο στο x_0, αλλά
3. Παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_0 - h, x_0)$, $(x_0, x_0 + h)$ και

Αν $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - h, x_0)$ και $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0, x_0 + h)$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 ή

Αν $f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - h, x_0)$ και $f'(x) > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + h)$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Π_{13}: ***Test της β' παραγώγου για max και min****:* Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι:

1. Υπάρχει η πρώτη παράγωγος της $\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

2. $f'(x_0) = 0$

3. Υπάρχει η $f''(x_0)$, τότε:

α. Αν $f''(x_0) > 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0

β. Αν $f''(x_0) < 0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0

γ. Αν $f''(x) = 0$ τότε βρίσκουμε την πρώτη μη μηδενιζόμενη παράγωγο $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Αν n περιττός τότε δεν έχουμε ακρότατο στο x_0.

Αν n άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, έχω ελάχιστο. Αν $f^{(n)}(x_0) < 0$, μέγιστο.

Π$_{14}$: Αν η $f : \Delta \to$ Ñ τότε $\forall \alpha, \beta \in \Delta$ με $\alpha < \beta$ και $\alpha < x < \beta$ έχω

f κυρτή $\Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. (Για κοίλες ισχύει η αντίστροφη ανισότητα).

Π$_{15}$: Έστω $f : \Delta \to$ Ñ, η f παραγωγίσιμη στα $\alpha, \beta \in \Delta$ και η f κυρτή, τότε $f'(\alpha) < f'(\beta)$. (Για κοίλη έχω αντίστροφη ανισότητα).

Π$_{16}$: Αν $f : \Delta \to$ Ñ και η f παραγωγίσιμη. Τότε αν η f' γν. αύξουσα στο Δ, τότε η f είναι κυρτή συνάρτηση στο Δ. Αν η f' γν. φθίνουσα στο Δ, τότε η f είναι κοίλη συνάρτηση στο Δ.

Π$_{17}$: ***(Jensen)*** Αν η f κυρτή σε διάστημα (α, β), τότε $\forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ θα ισχύει η σχέση $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) < \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, και αντιστρόφως. (Για κοίλη έχω αντίστροφη ανισότητα).

Π$_{18}$: Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Delta = (\alpha, \beta)$

1. Αν $f''(x) > 0$, $\forall x \in \Delta$, τότε η f κυρτή στο Δ.
2. Αν $f''(x) < 0$, $\forall x \in \Delta$, τότε η f κοίλη στο Δ.

Π$_{19}$: ***Αναγκαία συνθήκη σημείου καμπής:*** Αν το $M(x_0, f(x_0))$ είναι σ.κ. της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Π$_{20}$: ***Ικανή συνθήκη σημείου καμπής:*** Έστω $f : (\alpha, \beta) \to$ Ñ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και υπάρχει εφαπτομένη

στη γραφική παράσταση της f στο $(x_0, f(x_0))$ τότε στο x_0 έχω σημείο καμπής.

8. ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΙ:

Ο$_1$: ***Αρχική ή παράγουσα συνάρτησης ή αντιπαράγωγος της f**: Έστω* $f : \Delta \to$ Ñ. Αν $F : \Delta \to$ Ñ είναι συνάρτηση τέτοια ώστε $F'(x) = f(x),\ \forall x \in \Delta$, τότε η F λέγεται μία αρχική ή μία παράγουσα της f στο Δ.

Ο$_2$: ***Διαμέριση ενός διαστήματος*** $\Delta = [\alpha, \beta]$**:** Είναι ένα διατεταγμένο σύνολο $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ σημείων του Δ, τέτοιων ώστε: $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = \beta$.

Ο$_3$: ***Λεπτότερη διαμέριση**:* Αν P μία διαμέριση του $[\alpha, \beta]$, και P^* μία άλλη διαμέριση για την οποία ισχύει $P \subset P^*$, τότε η P^* θα λέγεται λεπτότερη διαμέριση από την P.

Ο$_4$: ***Norm* ή λεπτότητα διαμέρισης *P***: Συμβολίζεται με $\| P \|$ ή $\lambda(P)$ και ορίζεται ως $\| P \| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_n - x_{n-1}\}$ όπου $x_i,\ i = 0(1)n$ τα στοιχεία της διαμέρισης P.

Ο$_5$: ***Κάτω άθροισμα της f ως προς διαμέριση P**:* Αν $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ και f φραγμένη , συμβολίζουμε με $L(f, R)$, το διαβάζουμε «*Κάτω άθροισμα της f ως προς διαμέριση* P» (Το L από το "low") και ορίζουμε $L(f, R) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$, όπου $m_i = \inf\{f(t) : t_{i-1} \le t \le t_i\}$

Ο$_6$: ***Άνω άθροισμα της f ως προς διαμέριση P**:* Αν $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ και f φραγμένη , συμβολίζουμε με $U(f, P)$, το διαβάζουμε «*Άνω άθροισμα της f ως προς διαμέριση* ***P***» (το U από το "Upper") και ορίζουμε $U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$, όπου $M_i = \sup\{f(t) :\ t_{i-1} \le t \le t_i\}$.

Ο$_7$: ***Άνω ολοκλήρωμα Riemann**:* Αν $f : [\alpha, \beta] \to$ Ñ και f φραγμένη, τότε ως άνω ολοκλήρωμα ορίζουμε τον αριθμό $\overline{\int_{\alpha}^{\beta}} f = \inf_{P} U(f, P)$.

O$_8$: ***Κάτω ολοκλήρωμα Riemann:*** Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ και f φραγμένη, τότε ως κάτω ολοκλήρωμα ορίζουμε τον αριθμό $\int_{\underline{\alpha}}^{\beta} f = \sup_P L(f,P)$.

O$_9$: ***Συνάρτηση ολοκληρώσιμη κατά Riemann**:* Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ φραγμένη, τότε θα λέγεται ολοκληρωμένη κατά Riemann αν και μόνο αν $\int_{\alpha}^{-\beta} f = \int_{\overline{\alpha}}^{\beta} f$. (1)

O$_{10}$: ***Ολοκλήρωμα Riemann:*** Η κοινή τιμή της (1) στον προηγούμενο ορισμό.

O$_{11}$: ***Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes**:* Έστω $\alpha<\beta$, $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ, φραγμένη συνάρτηση. Έστω φ μία αύξουσα συνάρτηση $\varphi:[\alpha,\beta]\to$ Ñ και $P=\{\alpha=t_0<t_1<...<t_n=\beta\}$ μία διαμέριση του $[\alpha,\beta]$. Ορίζουμε ως

Κάτω άθροισμα της f ως προς τη συνάρτηση φ και τη διαμέριση P τον αριθμό $L(f,\varphi,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))$, όπου τα m_i ορίζονται όπως στο ολοκλήρωμα Riemann. Ομοίως ορίζουμε

Άνω άθροισμα της f ως προς τη συνάρτηση φ και τη διαμέριση P, τον αριθμό $U=(f,\varphi,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))$, όπου τα M_i ορίζονται όπως και στο ολοκλήρωμα Riemann.

Κάτω ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes είναι ο αριθμός $\int_{\underline{\alpha}}^{\beta} fd\varphi = \sup\{L(f,\varphi,P): R$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]\}$

Άνω ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes είναι ο αριθμός $\int_{\alpha}^{\overline{\beta}} fd\varphi = \inf\{U(f,\varphi,P): P$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]\}$

Η f ολοκληρώσιμη κατά $R-S$ αν και μόνο αν $\int_{\underline{\alpha}}^{\beta} fd\varphi = \int_{\alpha}^{\overline{\beta}} fd\varphi$ η δε κοινή τιμή (όταν υπάρχει) λέγεται *ολοκλήρωμα $R-S$ της f*.

O$_{12}$: ***Κύμανση της f ως προς τη διαμέριση P:*** Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ συνάρτηση και P μία διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ τότε η κύμανση της f ως προς τη διαμέριση P είναι ο αριθμός $V(f,P)=\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|$.

O$_{13}$: ***Ολική κύμανση της*** f ***στο*** $[\alpha,\beta]$***:*** Είναι ο αριθμός $V(f):=\sup\{V(f,P): P$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]\}$.

O$_{14}$: ***Συνάρτηση φραγμένης κύμανσης:*** Όταν $V(f)<+\infty$.

O$_{15}$: ***Απόλυτα συνεχής συνάρτηση****:* Μία $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ λέγεται απόλυτα συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, αν $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0:$ αν $(\alpha_1,\beta_1), (\alpha_2,\beta_2), (\alpha_3,\beta_3),...,(\alpha_n,\beta_n)$ ξένα ανά δύο ανοικτά υποδιαστήματα του $[\alpha,\beta]$ και $\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)<\delta$ τότε $\sum_{i=1}^{n}|f(\beta_i)-f(\alpha_i)|<\varepsilon$.

O$_{16}$: ***Μήκος συνάρτησης*** f ***από το α έως το β:*** Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και P μία διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ τότε ορίζουμε

$\mu(f,P)=\sqrt{(t_1-t_0)^2+(t_2-t_1)^2+...+(t_n-t_{n-1})^2}$. Ισχύει ότι

$0\le V(f,P)\le\mu(f,P)\le(\beta-\alpha)+V(f,P)$ (*).

Ως *μήκος της* f, ορίζουμε το: $\mu(f)=\sup\{\mu(f,P): P$ διαμέριση του $[\alpha,\beta]\}$.

O$_{17}$: ***Η f ευθυγραμμίσιμη στο*** $[\alpha,\beta]$**:** Όταν $\mu(f)<+\infty$. Από (*) φαίνεται ότι όταν η f είναι φραγμένης κύμανσης στο $[\alpha,\beta]$ θα είναι και ευθυγραμμίσιμη σ' αυτό.

O$_{18}$: ***Τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση****:* Μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ θα λέγεται έτσι, αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό πεπερασμένο υποδιάστημα του *Δ*.

O$_{19}$: ***Γενικευμένο ολοκλήρωμα από α έως*** $+\infty$***:*** αν $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως γενικευμένο ολοκλήρωμα της f από το α έως το $+\infty$ ως ακολούθως $\int_{\alpha}^{+\infty}f(x)dx:=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$.

Το β΄ μέλος μπορεί να είναι αριθμός πραγματικός, $+\infty$, $-\infty$ ή να μην συγκλίνει πουθενά το όριο.

O$_{20}$: ***Γενικευμένο ολοκλήρωμα από*** $-\infty$ ***έως β****:* Όπως και πριν αν $f:(-\infty,\beta]$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη τότε $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx := \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

O$_{21}$: ***Γενικευμένο ολοκλήρωμα από*** $-\infty$ ***έως*** $+\infty$ ***:*** Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx .$$

O$_{22}$: ***Πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy (C.P.V.)*** *του* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *:* Εξορισμού

$$C.P.v\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt .$$

O$_{23}$: ***Απόλυτη σύγκλιση γενικευμένου ολοκληρώματος****:* Αν $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, και $\int_{\alpha}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$, θα λέμε ότι το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει απόλυτα (ή ότι η f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη).

O$_{24}$: ***Σύγκλιση γεν. ολοκληρώματος υπό συνθήκη:*** Αν $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx = +\infty$, τότε λέμε ότι το $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει υπό συνθήκη (ή ότι η f είναι υπό συνθήκη ολοκληρώσιμη).

O$_{25}$: Αν $f:(\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\lambda\to\alpha^+}\int_{\alpha}^{\lambda} f(x)dx$.

Αν $g:[\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ επίσης μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\lambda\to\beta^-}\int_{\alpha}^{\lambda} f(x)dx$

Αν $h:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx \ \ (\alpha<\gamma<\beta)$.

Πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy γεν. ολοκληρώματος β΄ είδους συνάρτησης $f:(\alpha,\beta)\to Ñ \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$$C.P.V.\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\left\{\int_{\alpha}^{\gamma-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\gamma+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx\right\}$$

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ:

Π_1: Αν F_1, F_2 δύο αρχικές συναρτήσεις της f τότε διαφέρουν κατά σταθερά.

Π_2: Αν F_1 αρχική της f, τότε και η $F_2 := F_1 + C$ με C σταθερά, είναι αρχική της f.

Θ_3: Αν για τις $f_1, f_2 : \varDelta \to Ñ$ υπάρχουν τα αόριστα ολοκληρώματα στο $\varDelta$, τότε υπάρχει και το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $c_1 f_1 + c_2 f_2$, με c_1, c_2 σταθερές και ισχύει: $\int[(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]dx = c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx$.

Θ_4: ***Ολοκλήρωση με αντικατάσταση:*** Αν A, B δύο διαστήματα και $f : A \to Ñ$ μια συνεχής συνάρτηση και $\varphi : B \to Ñ$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in B$ και έτσι ώστε $R(\varphi) \subseteq A$ και $g(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, $t \in B$, τότε $\int f(x)dx + c = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, όπου στο δεύτερο ολοκλήρωμα, μετά τον υπολογισμό του, επανερχόμεθα στην αρχική μεταβλητή θέτοντας $t = \varphi^{-1}(x)$.

Θ_5: ***Παραγοντική ολοκλήρωση**:* Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα $\varDelta$, και η συνάρτηση $f' \circ g$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο $\varDelta$, τότε και η $f \circ g'$ έχει αόριστο ολοκλήρωμα στο $\varDelta$ και ισχύει:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx, \qquad x \in \varDelta.$$

Θ_6: ***Άνω και κάτω ολοκλήρωμα**:* Αν $f:[\alpha,\beta]\to Ñ$ μια φραγμένη συνάρτηση, τότε υπάρχει το κάτω και πάνω ολοκλήρωμα της f και $\int_{\underline{\alpha}}^{\beta} f dx \leq \int_{\alpha}^{\overline{\beta}} f(x)dx$.

Θ_7: ***Θεώρημα Darboux για άνω και κάτω ολοκλήρωμα:*** Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ μια φραγμένη συνάρτηση, τότε $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0: U(P,f)<\int_{\alpha}^{\bar{\beta}} f(x)dx+\varepsilon$ και $L(P,f)>\int_{\underline{\alpha}}^{\beta} f(x)dx-\varepsilon$ για κάθε διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ με $\|P\|<\delta$.

Θ_8: ***Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας Riemann (Μορφή Α΄)*** Μια φραγμένη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha,\beta]$, αν και μόνο αν, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta<0: U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon, \forall$ διαμέριση P με $\|P\|<\delta$.

Θ_9: ***Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας Riemann (Μορφή Β΄)*** Μια φραγμένη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ αν και μόνο αν, $\forall\varepsilon>0$, υπάρχει διαμέριση P του $[\alpha,\beta]$ για την οποία να ισχύει $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$.

Π_{10}: Αν η $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ έχει πεπερασμένο αριθμό σημείων ασυνεχείας στο $[\alpha,\beta]$ και είναι φραγμένη, τότε είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha,\beta]$.

Θ_{11}: Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι μια μονότονη συνάρτηση, τότε αυτή είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[\alpha,\beta]$.

Θ_{12}: ***Γραμμικότητα του ολοκληρώματος Riemann:*** Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ και $g:[\alpha,\beta]\to$ Ñ ολοκληρώσιμες κατά Riemann τότε και η $\kappa\cdot f+\lambda\cdot g$, $\kappa,\lambda\in$ Ñ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta}[\kappa\cdot f(x)+\lambda\cdot g(x)]dx=\kappa\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\lambda\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$

Θ_{13}: Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to$ Ñ και είναι ολοκληρώσιμες, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

α. Αν $f(x)\geq 0, \forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$

β. Αν $f(x)\leq g(x), \forall x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\leq\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

γ. Αν $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $c\in[\alpha,\beta]$ με $f(c)>0$ και η f συνεχής στο c, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$.

δ. Αν $f(x)\leq g(x),\ \forall x\in[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $c\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο οι $f,\ g$ είναι συνεχείς και $f(c)<g(c)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx<\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Π$_{14}$: Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ ολοκληρώσιμη, τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει: $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right|\leq\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|\,dx$.

Π$_{15}$: Αν η $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

Π$_{16}$: Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to$ Ñ ολοκληρώσιμες, τότε και η $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Θ$_{17}$: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $F:[\alpha,\beta]\to$ Ñ με $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 στο οποίο η f είναι συνεχής και $F'(x_0)=f(x_0)$.

Π$_{18}$: Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $F:[\alpha,\beta]\to$ Ñ με $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, τότε $\exists$ η F' και $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[\alpha,\beta]$.

Θ$_{19}$: ***Θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:*** Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$. Τότε μια συνάρτηση $F:[\alpha,\beta]\to$ Ñ ικανοποιεί τη σχέση $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt=G(x)-G(\alpha)$, αν και μόνο αν $F'(x)=f(x),\ \forall x\in[\alpha,\beta]$.

Θ$_{20}$: Αν $f:[\alpha,\beta]\to$ Ñ είναι ολοκληρώσιμη και $G:[\alpha,\beta]\to$ Ñ μια οποιαδήποτε αρχική της f, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)$.

Θ$_{21}$: ***Πρώτο θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού:*** Έστω αν f,g δύο συναρτήσεις, τέτοιες ώστε οι $f\cdot g$ και g να είναι ολοκληρώσιμες στο $[\alpha,\beta]$. Αν:

α. $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

β. Η g είναι σταθερού προσήμου στο $[\alpha, \beta]$, δηλαδή $g(x) \ge 0$ ή $g(x) \le 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$ τότε: $\exists n \in [m, M] : \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = n\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$. Αν επιπλέον η f είναι συνεχής, τότε $\exists x_0 \in [\alpha, \beta] : \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

Ως πόρισμα, για $g(x) = 1$ προκύπτει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = n(\beta - \alpha)$ και αν f συνεχής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(x_0)(\beta - \alpha)$.

Θ_{22}: ***Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού:*** Έστω σαν $f, g : [\alpha, \beta) \to$ Ñ για τις οποίες ισχύει:

α. Η f μονότονη στο $[\alpha, \beta]$

β. η g ολοκληρώσιμη και σταθερού προσήμου στο $[\alpha, \beta]$, δηλαδή $g(x) \ge 0$ ή $g(x) \le 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Τότε, υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\alpha)\int_{\alpha}^{x_0} g(x)dx + f(\beta) - \int_{\xi}^{\beta} g(x)dx .$$

Το θεώρημα γενικεύεται και όταν η g είναι απλώς και μόνο ολοκληρώσιμη.

Θ_{23}: ***Θεώρημα Bonnet**:* Έστω $g : [\alpha, \beta] \to$ Ñ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και σταθερού προσήμου. Τότε:

(i) Αν η f είναι φθίνουσα και θετική, τότε $\exists x_1 \in [\alpha, \beta]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\alpha) \cdot \int_{\alpha}^{x_1} g(x)dx .$$

(ii) Αν η f αύξουσα και θετική, τότε $\exists x_2 \in [\alpha, \beta]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx = f(\beta)\int_{x_2}^{\beta} g(x)dx .$$

Ομοίως το Θεώρημα γενικεύεται και όταν η g είναι απλώς και μόνο ολοκληρώσιμη.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΠΕΞΗΓΗΣΗΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

$\mathbb{R}$	:Το σύνολο των Πραγματικών αριθμών.
$\mathbb{Z}$	:Το σύνολο των ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Q}$	: σύνολο των Ρητών αριθμών
$\mathbb{N}$	:Το σύνολο των Φυσικών αριθμών
A_+^*	:Το σύνολο των θετικών μη μηδενικών στοιχείων του Α
A_-^*	;Το σύνολο των αρνητικών μη μηδενικών στοιχείων του Α
$\aleph_0$	:Άλεφ μηδέν
$f(x)$	;Η συνάρτηση f του χ
$f''(x)$	:Η δεύτερη παράγωγος συνάρτηση της f
$\overset{(n)}{f}(x)$	:n- τάξεως παράγωγος συνάρτηση της f
$\Re(f)$	:Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f
$f'(x)$	:Η παράγωγος συνάρτηση της f
$x \to x_0$	:Το χ τείνει στο χ_0
$x \to -\infty$	:Το χ τείνει στο πλην άπειρο
$x \to +\infty$	:Το χ τείνει στο συν άπειρο
$f_n \to f$	:Η ακολουθία f_n τείνει στην f
$f_n \xrightarrow{u} f$	:Η ακολουθία f_n τείνει ομοιόμορφα στην f
$f(A)$	:Οι εικόνες του συνόλου Α μέσω της συνάρτησης f
$f \uparrow$	:Αύξουσα συνάρτηση f
$f \downarrow$	:Φθίνουσα συνάρτηση f
f &	:Γνησίως αύξουσα συνάρτηση f
f '	:Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f
$D(f)$	:Το σύνολο τιμών της f
(μ,ν)=1	:Οι φυσικοί μ,ν έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη την μονάδα , δηλ. είναι πρώτοι μεταξύ τους ή πρώτοι προς αλλήλους.
$S(\chi_0, \varepsilon)$	:Περιοχή κέντρου χ_0 και ακτίνας ε ,το διάστημα $(\chi_0-\varepsilon,\chi_0+\varepsilon)$
$\overline{\mathbb{R}}$	:Είναι το σύνολο $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$	:Το σύνολο των απείρων όρων της ακολουθίας α_ν
$\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	:Ένας καλύτερος συμβολισμός του προηγουμένου
(α_n)	:Ένας λιγότερο καλός των δύο προηγουμένων
α_n	:Ο n-οστός όρος της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Καμιά φορά , καταχρηστικά , όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, συμβολίζει και την ίδια την ακολουθία.
a_{n_k}	:Υπακολουθία της α_n
$\overline{\lim}$	:Limes superior
$\underline{\lim}$	:Limes inferior
sup	:Supremum

$\inf$:Infimum

$\lim a_n$:Όριο της ακολουθίας $α_n$

S_n $:= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... a_n = \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa$

$\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa$ $:= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... a_n + ... = \lim_{n\to\infty} S_n$

$(f \circ g)(x)$ $:= f(g(x))$

f^{-1} :Η αντίστροφη συνάρτηση της f

$\| \ \|$:norm

$L(f, P)$:Κάτω άθροισμα της f ως προς την διαμέριση P

$U(f, P)$:Άνω άθροισμα της f ως προς την διαμέριση P

$\underline{\int_a^\beta} f$:Κάτω ολοκλήρωμα Riemann

$\overline{\int_a^\beta} f$:Άνω ολοκλήρωμα Riemann

$V(f, P)$:Κύμανση της f ως προς την διαμέριση P

$V(f)$:Κύμανση της f

$\mu(f, P)$:Μήκος της συνάρτησης f ως προς την διαμέριση P

$\mu(f)$:Μήκος της συνάρτησης f

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$:Γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από α έως συν άπειρο

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:Γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από πλην άπειρο έως συν άπειρο

$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx$:Γενικευμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από πλην άπειρο έως β

$\int_a^{\beta} f(x)dx$:Ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από α έως β

$\int f(x)dx$:Αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f

$C.P.V. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:Πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy του γενικευμένου ολοκληρώματος από πλην άπειρο έως συν άπειρο της συνάρτησης f

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν στο γενικό Α΄μέρος της Εργασίας:

Αναπολιτάνος Δ.Α. *«Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών»* Εκδόσεις Νεφέλη – Αθήνα 1985

Αντωνοπούλου Κυριακούλα *«Η Διδασκαλία της Γραμμικής Άλγεβρας μέσω Αντιπαραδειγμάτων»* Διπλωματική Εργασία – Βιβλιοθήκη Μαθηματικού τμήματος Παν. Αθηνών

Αραχωβίτης Ιωάννης *«Έννοιες και ιδέες από την ιστορία των Μαθηματικών αρωγοί στη σύγχρονη διδακτική τους»* Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας σελ.163-174 .-Κομοτηνή Νοέμβριος 2002

Αραχωβίτης Ιωάννης-Αντωνοπούλου Κυριακούλα *«Η Δίτιμη Αριστοτέλεια Λογική , το Αντιπαράδειγμα και η χρήση του στην διδασκαλία της Γραμμικής Άλγεβρας»* Πρακτικά 19ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας ,σελ. 224-236 Κομοτηνή Νοέμβριος 2002

Bell E.T. *«Οι Μαθηματικοί»* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης –Ηράκλειο 2001

Briggs John – Peat David F. *«Ο Ταραγμένος Καθρέφτης»* Εκδόσεις Κάτοπτρο

Γαγάτσης Αθανάσιος *«Διδακτική των Μαθηματικών»* Εκδόσεις «ART of TEXT»Α.Ε. –Θεσσαλονίκη 1995

Chalmers A.F. *«Τι είναι αυτό που λέμε Επιστήμη;»* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης –Ηράκλειο 2001

Δαμαλάς Γεώργιος *«Το Αντιπαράδειγμα και η Διδακτική του Σημασία»* Πρακτικά 15ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας σελ.170 –176 , Χίος , Νοέμβριος 1998

Δρόσος Κώστας Α. *«Εισαγωγή στην Μαθηματική Σκέψη»* Τόμος 1ος Μαθηματικές Περιηγήσεις –Τμήμα Μαθηματικών Παν. Πατρών.

Δρόσος Κώστας Α. *«Περιήγηση στα Μαθηματικά»* Πανεπιστήμιο Πατρών –Πάτρα 1986

Δρόσου Κάστα Α. –Σιαφαρίκα Παναγιώτη *«Βασική αφηρημένη Ανάλυση»* - Πάτρα 1978

Davis P.J.-Hersh R. *«Η Μαθηματική Εμπειρία»* Εκδόσεις Τροχαλία –Αθήνα.

Εκπαιδευτική Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια *«Μαθηματικά –Φυσική –Χημεία»* τ. Α΄ και Β΄ -Εκδοτική Αθηνών.

Gardner Martin *«Η Μαγεία των Παραδόξων»* -Εκδόσεις Τροχαλία-Αθήνα 1989

Gardner Martin *«Το πανηγύρι των Μαθηματικών»* -Εκδόσεις Τροχαλία

Howard Eves *«Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650»* Εκδόσεις Τροχαλία –Αθήνα 1990

Κολέζα Ε.Γ. –Μακρής Κ.Ν. – Σούρλας Κ.Β. *«Θέματα διδακτικής των Μαθηματικών»* Εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 2000

Κολέζα Ευγενία *«Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών»* Εκδόσεις Leader Books – Αθήνα 2000

Kline Morris *«Τα Μαθηματικά στον Δυτικό Πολιτισμό»* Τόμος Β΄ Μετάφραση Σπύρος Μαρκέτος –Εκδόσεις Κώδικας

Lakatos Imre *«Αποδείξεις και Ανασκευές-Η Λογική της Μαθηματικής ανακάλυψης»* Εκδόσεις Τροχαλία –Αθήνα 1996

Lelek Andrzej *«Εισαγωγή στα Σύνολα και την Τοπολογία»* Εκδόσεις Τροχαλία.

Maor Eli *«Τριγωνομετρικά Λουκούμια»* Εκδόσεις Κάτοπτρο –Αθήνα 2002

Πατάκη *«Λεξικό Μαθηματικών»(*Duden , Rechnen und Methematik) Μετάφραση – επεξεργασία Γ.Ν. Παντελίδη-Δ.Χ. Κραββαρίτη -Αθήνα 1997

Rucker Rudy *«Το Άπειρο και ο Νους»* -Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης – Ηράκλειο 1999

Sawyer W.W. *«Τι είναι ο Απειροστικός Λογισμός»* Εκδόσεις Τροχαλία –Αθήνα 1993

Selden John - Selden Annie *«The Role of Examples in Learning Mathematics»* 1998 http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_5.html

Singh Simon *«Το τελευταίο Θεώρημα του Φερμά»* Εκδόσεις Π. Τραυλός –Αθήνα 1998

Struik Dirk J. *«Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών»* Εκδόσεις Ι.Ζαχαρόπουλος – Αθήνα 1982

Τουμάσης Μπάμπης *«Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών»* Εκδόσεις Gutenberg Αθήνα 2000

Vilenkin N. Ya *«Αναζητώντας το Άπειρο»* Εκδόσεις Κάτοπτρο – Αθήνα Απρίλιος 1997

Φάππα Νίκου Α. *«Η απόδειξη στα Μαθηματικά»* -Αθήνα Ιανουάριος 1990

<u>Βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν στο Β΄ ειδικό μέρος της εργασίας.</u>

Ayres Frank *«Γενικά Μαθηματικά» 950 Λυμένα και 1098 άλυτα προβλήματα* – ΕΣΠΙ Αθήνα 1983

Αγάπης Τάσος *«Μελέτη και γραφική παράσταση Συναρτήσεων»* -Αθήνα Ιούνιος 2001

Berman G.N. *«Προβλήματα Μαθηματικής Αναλύσεως»* Τόμος Α΄Εκδόσεις Γ. Σπηλιώτη Αθήνα 1997

Γαλάνης Ε. *«Εισαγωγή στην Πραγματική Ανάλυση»* -Εκδόσεις Συμεών -Αθήνα 1988

Γιαννακούλιας Ευστάθιος *«Σημειώσεις στην διδακτική του Απειροστικού Λογισμού»* -Αθήνα 11/4/2002

Gelbaum Bernard R.- Olmsted John M. *"Counterexamples in Analysis"* –Holden Day , Inc San Francisco 1964

Κάππου Δημητρίου Α. Μαθήματα Αναλύσεως *«Απειροστικός Λογισμός»* Τεύχος Α΄Αθήνα 1962

Κάππου Δημητρίου Α. Ασκήσεις Αναλύσεως *«Απειροστικός Λογισμός»* Τεύχος Α΄Αθήνα 1964

Κάππου Δημητρίου Α. Ασκήσεις Αναλύσεως *«Απειροστικός Λογισμός»* Τεύχος Β΄Αθήνα 1965

Κάππου Δημητρίου Α. Ασκήσεις Αναλύσεως *«Απειροστικός Λογισμός»* Τεύχος Γ΄Αθήνα 1967

Κυβεντίδης Θωμάς *«Διαφορικός Λογισμός»* Συναρτήσεων μιας Πραγματικής Μεταβλητής Τεύχος Πρώτο& Τεύχος Δεύτερο Εκδόσεις Ζήτη –Θεσσαλονίκη 2001

Νεγρεπόντης Σ. Γιωτόπουλος Σ. Γιαννακούλιας Ε. *«Απειροστικός Λογισμός»* Τόμος Ι . Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 1999

Νεγρεπόντης Σ. Γιωτόπουλος Σ. Γιαννακούλιας Ε. *«Απειροστικός Λογισμός»* Τόμος ΙΙα . Εκδόσεις Συμμετρία Αθήνα 2000

Νεγρεπόντης Στυλιανός *«Εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό»* -Σημειώσεις Παραδόσεων- Παν. Αθηνών –Αθήνα 1976

Ντούγια Σωτήρη Κ. *«Απειροστικός Λογισμός 1»* -Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων – Ιωάννινα 2000

Ντούγια Σωτήρη Κ. *«Απειροστικός Λογισμός 2»* -Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων – Ιωάννινα 2000

Παντελίδη Γεωργίου Ν. *«Βιβλίο του Διδάσκοντος για το Μάθημα Ανάλυση της Γ΄Λυκείου»* Εκδόσεις Ζήτη – Θεσσαλονίκη 1998

Πουλέας Ε. *«Λογισμός Ι»* Θεσσαλονίκη 2003

Πουλέας Ε. *«Λογισμός ΙΙ»* Θεσσαλονίκη 2003

Σπανδάγου Βαγγέλη *«Σειρές»* Θεωρία –Μεθοδολογία-400 ασκήσεις –Εκδόσεις Αίθρα –Αθήνα Ιανουάριος 2002

Σπανδάγου Βαγγέλη *«Ασκήσεις Απειροστικού Λογισμού»* Εκδόσεις Αίθρα Αθήνα 2002

Σπανδάγου Ευάγγελου-Σπανδάγου Ρούλας *«Μαθηματικά Παράδοξα και Μαθηματικά παιγνίδια»* Εκδόσεις Αίθρα – Ιούνιος 2003

Spivak Michael *«Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός»* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης –Ηράκλειο 2001

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

CPV	πρωτεύουσα τιμή κατά Cauchy
R-S	=Riemann-Stieltjes
α.χ.	=αντιπαραδείγματος χάριν
βλ.	βλέπε
γν.	=γνησίως
δηλ.	= δηλαδή
ΕΕ	=Ευρωπαϊκή ένωση
Η/Υ	= ηλεκτρονικός υπολογιστής
ΘΕΤ	= θεώρημα ενδιαμέσων τιμών
ΘΜΤ	= θεώρημα μέσης τιμής
κ.ά.	=και άλλα
κ.ο.κ.	=και ούτω κάθε εξής
λ.χ.	=λόγου χάριν
ό.έ.δ.	=όπερ έδει δείξαι
ΟΕΔΒ	= Οργανισμός εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων
ΟΟΣΑ	=Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας & Ανάπτυξης.
π.χ.	= παραδείγματος χάριν
σ.σ.	= σημείο συσσωρεύσεως
σελ.	=σελίδα
τ.	=τόμος /οι

Διεύθυνση κατοικίας:
Γιάννης Πλατάρος του Παναγιώτη.

Καπετάν Κρόμπα 37
242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ

Τηλ. Οικίας : 27220-23585

Τηλ. Οικίας: 27220-22164

Η/Δ **plataros@pathfinder.gr**

Εναλλακτικώς: Plataros@sch.gr

Ιστοσελίδα: http://homepages.pathdinder.gr/plataros